

# ESTUDIO NUMÉRICO DE LA SOLUCIÓN PARA EL PROBLEMA DEL DIQUE

Irla Mantilla Núñez, Luis Roca Galindo  
Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica, Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional de Ingeniería  
E-mail: labosin@uni.edu.pe

## RESUMEN

*Se considera el flujo de un fluido laminar que se filtra a través de un medio poroso. Este comportamiento conduce a la formulación de un modelo matemático que mediante la transformación de Baiocchi permite expresarlo como un problema de frontera libre. En éste se desea evaluar el gradiente de presión del fluido en el medio. El presente trabajo consiste en lo siguiente: i) formulación variacional del problema ii) estudio de la existencia y unicidad de solución y iii) resolución numérica del problema de minimización convexa generado. Para hallar la solución numérica de la inecuación variacional, se ha utilizado el método de Elementos Finitos y el algoritmo de Uzawa. En la simulación numérica del problema del dique se ha considerado como dominio de cálculo computacional, una geometría en  $\mathbb{R}^2$  de forma rectangular, asumiendo como fronteras conocidas, la zona impermeable, la que está en contacto con el aire y la que coexiste con el fluido. La frontera libre (o desconocida) es generada por la curva que separa la zona seca de la zona húmeda. La técnica numérica que se ha realizado para resolver este problema es muy eficaz y se recomienda en otros problemas de tipo no lineal, por ser extensible el tratamiento matemático y por la velocidad de convergencia computacional en el proceso.*

## ABSTRACT

*The flow of a laminar fluid is considered that filters through porous means. This behavior leads to the formulation of a mathematical model that by means of the transformation of Baiocchi allows to express it like a problem of free boundary. In this one it is desire to evaluate the gradient of pressure of the fluid in means. The present work consists of the following thing: i) variational formulation of the problem ii) study of the existence and unicity of solution and iii) numerical resolution of the generated problem of convex minimization. In order to find the numerical solution of the variational problem, the Finite Elements Method and Uzawa algorithm, it has been used. In the numerical simulation of the problem of the dam a geometry in  $\mathbb{R}^2$  of rectangular form it has been considered like domain of computational calculation, assuming that the impermeable zone, the one in contact with the air and the one that coexists with the fluid, to be known borders. The free border (or unknown) is generated by the curve that separates the dry zone of the wet zone. The numerical technique that has been made to solve this problem is very effective and it is recommended in other problems of nonlinear type, to be tensile in the mathematic process and by the speed of computational convergence in the process.*

## INTRODUCCIÓN

En muchos problemas originados en la Mecánica de Fluidos, se desea conocer cantidades físicas, como por ejemplo: velocidad, temperatura, presión, densidad,

etc, que satisfagan algún tipo de problema con formulación en derivadas parciales con valores de frontera. Generalmente se resuelven los problemas donde la variable a evaluar, tiene valores conocidos en la frontera de la región de estudio. En el presente

trabajo se propone la resolución de un problema donde una de las fronteras que delimitan la región de estudio es desconocida, lo que se conoce como problema de frontera libre siendo conocido el valor que la variable incógnita toma en ella. Esta frontera por determinar se considera una incógnita más para el problema. Casos como éste se presentan frecuentemente en la construcción de embalses artificiales, y en otros problemas donde las características físicas del medio donde se resuelve el problema son distintas.

Nuestra atención se dirige al caso de evaluar de forma numérica la velocidad de flujo, y el comportamiento de la presión de un fluido que se desplaza a través de un medio poroso llamado Dique, por lo que se le denomina "Problema del Dique". Este problema conduce a una Inecuación Variacional del tipo Elíptico, la cual procede de un problema de contorno siendo desconocida una de sus fronteras. El desarrollo del presente trabajo consiste en realizar el estudio de existencia y unicidad de la solución, propuesta de una técnica de resolución numérica y se dan algunos resultados de la convergencia de la solución aproximada.

### Descripción física del problema del Dique

Cuando llueve o nieva, parte del agua que cae es retenida por el suelo, otra es absorbida por la vegetación, parte se evapora, y el resto, que se incorpora al caudal de los ríos recibe el nombre de aguas de escorrentía. Las inundaciones se producen, cuando al no poder absorber el suelo y la vegetación toda el agua, ésta fluye sin que los ríos sean capaces de canalizarla ni los estanques naturales o pantanos artificiales creados por medio de presas puedan retenerla. Las escorrentías alcanzan cerca de un 30% del volumen de precipitación, y esta cantidad puede aumentar al fundirse las masas de nieve. Las cuencas de muchos ríos se inundan periódicamente de manera natural, formando lo que se conoce como llanura de inundación.

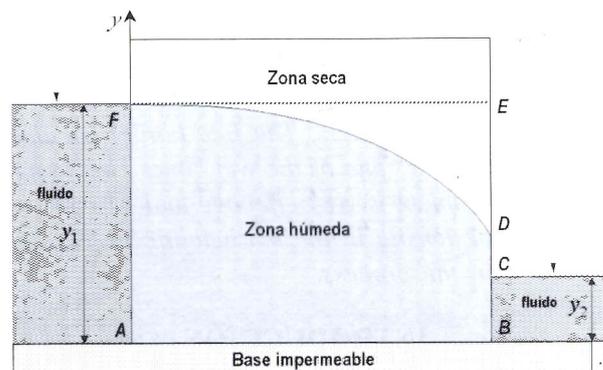
Las inundaciones fluviales son por lo general consecuencia de una lluvia intensa, a la que en ocasiones se suma la nieve del deshielo, con lo que los ríos se desbordan. Se dan también inundaciones relámpago en las que el nivel del agua sube y baja con rapidez. Éstas suelen obedecer a una lluvia torrencial sobre un área relativamente pequeña. Por ejemplo las zonas costeras se inundan a veces durante



*Fig. 1 Embalse Natural*

la pleamar, a causa de mareas inusualmente altas motivadas por fuertes vientos en la superficie oceánica, o por maremotos debidos a terremotos submarinos. En este caso se considera el agua retenida embalses con diferentes niveles de profundidad y separados por un dique (Fig. 2). El agua se filtra por gravedad, desde el nivel más alto al nivel más bajo. Entonces el problema consiste en determinar algunas cantidades físicas importantes, tales como el campo de velocidad del flujo, presión del fluido, la capacidad de acarreo, así como también algunas incógnitas geométricas necesarias (líneas de corriente y la porción seca del dique) asociadas al movimiento del fluido.

Estudiaremos el problema bajo las hipótesis de flujo bidimensional estacionario en ausencia de evaporación y del fenómeno de capilaridad, asumiendo que el fluido es incompresible y que el material del dique es poroso, e isotrópico. Pueden existir presas con diques de forma rectangular (Fig. 2) o de una forma generalizada (Fig. 3).



*Fig. 2 Dique rectangular*

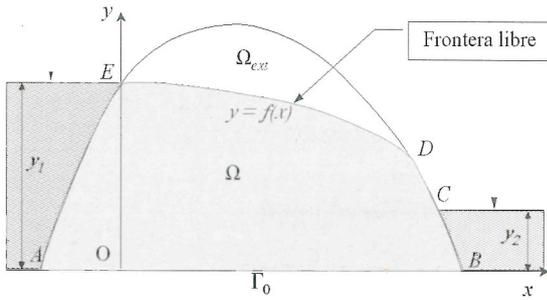


Fig. 3 Dique de forma generalizada

Para el desarrollo numérico que presentaremos en este trabajo, asumimos que el dique es de forma rectangular y está compuesto por paredes verticales y de base horizontal.

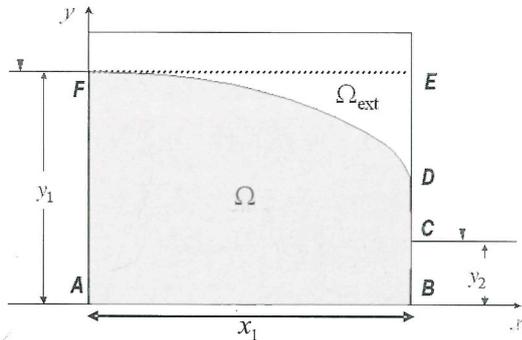


Fig. 4 Esquemmatización del dique rectangular

Ahora introducimos algunas notaciones:

Las variables  $y_1, y_2, x_1$  denotan las alturas de los depósitos y el espesor del dique, respectivamente. La región ocupada por el dique será denotada por  $D \subset \mathbb{R}^2$  donde encontramos dos regiones, una llamada  $\Omega$  donde se concentra el fluido y otra llamada  $\Omega_{ext}$  donde no tenemos presencia del fluido. La ecuación que gobierna el desplazamiento del fluido viene dada por la ley de Darcy:

$$q = -\frac{k}{\mu} \nabla(p + \rho gy) \quad (1)$$

Donde  $q$  es el vector velocidad del fluido,  $p$  es la presión,  $\rho$  es la densidad,  $\mu$  es la viscosidad,  $k$  es el coeficiente de permeabilidad del medio ( $\rho, \mu, k$  se consideran constantes) y suponemos que la ordenada  $y$  es positiva.

Si definimos el potencial de velocidad como:

$$\phi = p + \rho gy \quad (2)$$

Podemos expresar el campo de velocidades como:

$$q = -\frac{k}{\mu} \nabla \phi \quad (3)$$

Debido al principio de conservación de la cantidad de masa se requiere que la velocidad del fluido satisfaga la siguiente condición de continuidad:

$$\nabla \cdot q = 0 \quad (4)$$

Relacionando esto con el potencial de velocidades obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \nabla \cdot \nabla \phi \\ &= -\nabla \cdot q \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Es decir,  $\phi$  satisface la ecuación de Laplace en la zona húmeda  $\Omega$ .

Haciendo un adecuado cambio en las unidades de longitud, y sin cambio en anotación escribimos:

$$\phi = p + y \quad (6)$$

**Condiciones de Frontera para  $\phi$**

$$\text{En } \overline{AF} : \phi(0, y) = y_1 \quad (7)$$

$$\text{En } \overline{BC} : \phi(x_1, y) = y_2 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{En } \overline{FD} : \phi(x, f(x)) &= f(x) \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(x, f(x)) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{En } \overline{CD} : \phi(x_1, y) &= Y \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_1, y) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{En } \overline{AB} : \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad (11)$$

$f(x)$  es una función cuyo gráfico representa la frontera desconocida, y se considera como una incógnita más del problema.

**Transformación de Baiocchi**

El propósito en esta sección es reformular el problema extendiéndolo a todo el dominio  $D$ , ya que hasta ahora sólo tenemos información sobre  $\Omega$ . Para esto definimos la siguiente función escalar,  $\phi_D$ , como:

$$\phi_D(x, y) = \begin{cases} \phi(x, y) & \text{en } \overline{\Omega} \\ y & \text{en } \overline{D} - \overline{\Omega} \end{cases} \quad (12)$$

Definida sobre toda la región  $D = \Omega_{\text{ext}} \cup \Omega \cup \Gamma$  donde  $\Gamma$  es la frontera libre.

Y definimos además una nueva función  $w$ , llamada Transformación de Baiocchi, de la forma:

$$w(x, y) = \int_y^{y_1} [\phi_D(x, \eta) - \eta] d\eta \quad \text{en } \bar{D} \quad (13)$$

**Comportamiento de  $w$**

$$w(x, y) = 0 \quad \text{en } \Omega_{\text{ext}} \cup \Gamma \quad (14)$$

$$w(x, y) = \int_y^{f(x)} p(x, \eta) d\eta \quad \text{en } \Omega$$

$$\text{y por tanto } w(x, y) > 0 \quad \text{en } \Omega \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta w &= 1, \quad \text{en } \Omega \\ \Delta w &= 0, \quad \text{en } \Omega_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (16)$$

**Condiciones de Frontera para  $w$**

$$\text{En } \overline{AF} : w(0, y) = \frac{1}{2} (y_1 - y)^2 \quad (17)$$

$$\text{En } \overline{BC} : w(x_1, y) = \frac{1}{2} (y_2 - y)^2 \quad (18)$$

$$\text{En } \overline{CD} : w(x_1, y) = 0 \quad (19)$$

$$\text{En } \overline{DE} : w(x_1, y) = 0 \quad (20)$$

$$\text{En } \overline{EF} : w(x_1, y) = 0 \quad (21)$$

$$\text{En } \overline{AF} : w(x, 0) = \frac{y_1^2}{2} - \frac{(y_1^2 - y_2^2)x}{2x_1} \quad (22)$$

Estas condiciones para  $w$  en el borde de  $D$ , nos permite definir:

$$\begin{aligned} g : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto w(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

donde  $(x(t), y(t))$ , es una parametrización de  $\partial D$ .

Observación.-  $g$  es continua sobre  $\partial D$ , pero no diferenciable en toda la frontera, sino sólo en casi en todas partes de ella, pues el dominio  $D$  tiene aristas en los bordes.

### Formulación Diferencial

Con las notaciones anteriores  $w$  es solución del siguiente problema:

$$[PD] \begin{cases} \text{Encontrar } w \in H^1(D) : \\ \Delta w = \chi_\Omega, \quad \text{en } (C_0^\infty(D))' \\ w|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \quad (23)$$

### Formulación Variacional

Utilizando la transformación de Baiocchi podemos expresar el problema del dique por medio de una inecuación variacional elíptica de primera especie (IVE). Para ello definimos el espacio funcional  $V = H_0^1(D)$ , y  $\bar{w} \in V$ , con  $\bar{w} = w - \hat{g}$ , para  $\hat{g} \in H^1(D)$  con  $\hat{g}|_{\partial\Omega} = g$ .

Entonces:

El problema [PD] es equivalente a resolver el siguiente problema variacional para  $\bar{w}$ :

$$[PV] \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{w} \in K : \\ a(\bar{w}, v - \bar{w}) \geq L(v - \bar{w}), \quad \forall v \in K \end{cases} \quad (24)$$

$$\text{donde: } a(u, v) = \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy$$

$$L(v) = - \int_D (v + \nabla \hat{g} \cdot \nabla v) \, dx \, dy$$

$$K = \{v \in V : v \geq -\hat{g} \text{ c.p.d en } D\}$$

Dada la simetría de la forma bilineal de la inecuación variacional, la solución buscada  $w(x, y)$  será también solución del problema de optimización:

$$J(\bar{w}) = \min_{v \in K} J(v) \quad (25)$$

Donde el funcional  $J$  esta definido por:

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \quad (26)$$

En efecto se trata de resolver el problema de minimización:

$$[PM] \begin{cases} \text{Hallar } \bar{w} \in K \\ J(\bar{w}) \leq J(v), \quad \forall v \in K \end{cases} \quad (27)$$

El siguiente teorema me garantiza la existencia y la unicidad de solución para el problema [PV].

### Teorema de Lions Stampacchia

Sea  $V$  un espacio de Hilbert con producto interno

$(\cdot, \cdot)_V$  y una norma asociada  $\| \cdot \|_V$ ,  $a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal,  $V$ -elíptica y continua,  $K \subset V$  un conjunto convexo, cerrado y no vacío, y  $L$  una forma lineal continua. Entonces el problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in K \text{ tal que:} \\ a(u, v - u) \geq L(u - v), \quad \forall v \in K \end{array} \right. \quad (28)$$

Tiene una y sólo una solución.

### Formulación Lagrangiana

Introducimos ahora el espacio  $W = L^2(D)$ , y la funcional  $I_K$  definida sobre  $W$  de la siguiente manera:

$$I_K(v) = \begin{cases} 0, & \text{si } v \in K \\ +\infty, & \text{si } v \notin K \end{cases} \quad (29)$$

Esta funcional es llamada “funcional indicatriz”, y es propia, semicontinua inferiormente (s.c.i) y convexa en el caso de que  $K$  sea convexo.

De esta manera el problema [PM] es equivalente a:

$$[\text{PM2}] \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \bar{w} \in V \\ J(\bar{w}) + I_K(\bar{w}) \leq J(v) + I_K(v), \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

Asociado a una funcional,  $j$ , se define la “conjugada de  $j$ ”,  $j^*$ , como:

$$j^*(q) = \sup_{v \in W} \{ \langle q, v \rangle_W - j(v) \}, \quad q \in W' \quad (30)$$

Al ser  $I_K(\cdot)$  s.c.i., convexo y propio, se puede escribir:

$$I_K(v) = \sup_{q \in W'} \{ \langle q, v \rangle_W - I_K^*(q) \} \quad (31)$$

Por tanto, [PM2] se convierte en:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \bar{w} \in V \\ J(\bar{w}) + I_K(\bar{w}) = \inf_{v \in V} \sup_{q \in W'} \{ J(v) + \langle q, v \rangle_W - I_K^*(q) \} \end{array} \right.$$

Definimos el lagrangiano  $\Pi$  como:

$$\Pi(v, q) = J(v) + \langle q, v \rangle_W - I_K^*(q) \quad v \in V, q \in W'$$

Sabemos que si el par  $(\bar{w}, \bar{q})$  es punto de silla del lagrangiano  $\Pi$ , entonces  $\bar{w}$  es solución de [PM2], y además tal punto de silla está caracterizado de la siguiente forma:

$$J(\bar{w}) + \langle \bar{q}, \bar{w} \rangle_W = \inf_{v \in V} \{ J(v) + \langle \bar{q}, v \rangle_W \} \quad (32)$$

$$\bar{q} = J_\lambda^{\partial I_K^*}(\bar{q} + \lambda \bar{w}) \quad (33)$$

Es posible demostrar que:

$$\left. \begin{array}{l} I_K^*(q^*) = I_{K^*}(q^*) \\ J_\lambda^{\partial I_{K^*}}(q^*) = \text{proy}_{K^*}(q^* + \lambda \hat{g}) \end{array} \right\}, \text{ y} \quad (34)$$

donde,  $\text{proy}_{K^*}$  es el operador proyección sobre  $K^*$ ,  $J_\lambda^{\partial I_{K^*}}$  es el Resolvente Yosida asociado a la subdiferencial  $\partial I_{K^*}$ , en el contexto de los operadores monótonos multivaluados, y

$$K^* = \left\{ q^* \in W': \langle q^*, q + \hat{g} \rangle_W \leq 0, \quad \forall q \in K \right\}$$

La caracterización 32 y 33, motiva el siguiente algoritmo:

Algoritmo de Uzawa.- El algoritmo de Uzawa está basado en la construcción de dos sucesiones de elementos  $u^n \in V$ ,  $p^n \in K^*$ , definidas de la siguiente manera:

1. Empezamos con cualquier  $p^n \in K^*$
2. Siendo conocido  $p^n$  calculamos  $u^n$  como el elemento de  $V$  que minimiza

$$J(u^n) + \langle p^n, u^n \rangle_W$$

3. Luego definimos

$$p^{n+1} = \text{proy}_{K^*}(p^n + \lambda(u^n + \hat{g}))$$

para  $\lambda$  adecuado.

### Resolución Numérica Aproximada

Para la resolución numérica del problema el dominio de cálculo es discretizado por medio de una triangulación clásica  $\tau_h$ . Definimos  $\sum_h$  como:

$$\sum_h = \{ P \in D : P \text{ es un vértice de } T \in \tau_h \}$$

Sea  $n$  el número de nodos interiores y  $p$  el número de nodos ubicados en la frontera de  $D$

Aproximamos  $W$ , por:

$$W_h = \{ v_h \in C^0(D) : v_h|_T \in P_1, \quad \forall T \in \tau_h \} \quad (35)$$

De la misma manera aproximamos  $V$  como:

$$V_h = \{ v_h \in W_h : v_h|_{\partial D} = 0 \} \quad (36)$$

Es claro que  $V_h$  y  $W_h$  son finito dimensionales, y que  $\dim(V_h) = n$  y  $\dim(W_h) = n + p$

También podemos aproximar naturalmente  $K$  como:

$$K_h = \{v_h \in V_h : v_h(P) \geq 0, \forall P \in \Sigma_h\}$$

El conjunto  $K_h$  es un subconjunto de  $V_h$  cerrado, convexo y no vacío.

**Formulación del lagrangiano asociado al problema de minimización convexa discreto**

Sea  $B = \{b_j, j=1,2,\dots,n+p\}$  una base del espacio  $W_h$ , y  $\{b_j, j=1,2,\dots,n\}$  una base de  $V_h$ .

Entonces podemos escribir:

$$q_h = \sum_{i=1}^{n+p} q_i b_i \tag{37}$$

y, 
$$v_h = \sum_{i=1}^n v_i b_i \tag{38}$$

De modo que el funcional  $J$  se exprese de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} J(v_h) &= \frac{1}{2} a(\sum v^i b_i, \sum v^j b_j) - L(\sum v^i b_i) \\ &= \frac{1}{2} (v^1, \dots, v^n)^t K (v^1, \dots, v^n) - (v^1, \dots, v^n)^t F \\ &= \frac{1}{2} v^t K v - v^t F \end{aligned}$$

donde  $K_{ij} = a(b_i(x), b_j(x))$ , y  $F_i = L(b_i(x))$  son los coeficientes de  $K$  y de  $F$  respectivamente.

Con estas notaciones proponemos el lagrangiano asociado:

$$\Pi_h(v_h, q_h) = J(v_h) +_{W_h} \langle q_h, v_h \rangle_{W_h} - I_{K_h}^*(q_h) \quad v \in V_h, q \in W_h'$$

con:

$$(q_h, v_h)_{W_h} = \sum_{i=1}^{n+p} q_i \cdot v_i \tag{39}$$

o de otra forma:

$$\Pi_h(v, q) = v^t K v - v^t F + v^t q - I_B(q), \quad \forall v \in A, \forall q \in B$$

donde:

$$A = \mathbb{R}^n$$

y 
$$B = \mathbb{R}^{n+p}$$

**Algoritmo de Uzawa para el problema discreto**

El algoritmo de Uzawa está basado en la construcción de dos sucesiones de elementos  $u^n \in A$ ,  $q^n \in B$ ,

definidas de la siguiente manera:

1. Empezamos con cualquier  $q^n \in B$
2. Siendo conocido  $q^n$  calculamos  $u^n$  como el elemento de  $A$  que minimiza:

$$(u^n)^t K u^n - (u^n)^t F + (u^n)^t q^n$$

Es decir:  $Ku^n = F - q^n$

3. Luego definimos

$$q^{n+1} = \text{proy}_B(q^n + \lambda(u^n + \hat{g}))$$

**RESULTADOS NUMÉRICOS**

Consideremos una sección transversal del dique de forma rectangular

$$D = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$$

Es decir  $y_1 = x_1 = 1.0$ , y además consideramos:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= 0, 3 \\ k / \mu &= 1, 0 \\ \rho \cdot g &= 1, 0 \\ \lambda &= 0, 0 1 \end{aligned}$$

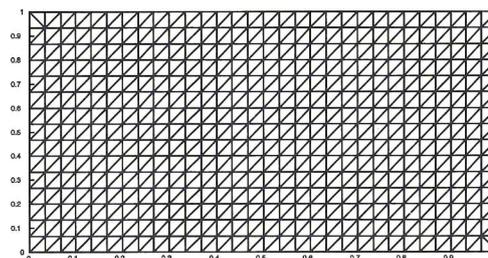


Fig. 4 Dominio mallado con elementos Triangulares compuesto de 900 elementos.

La Figura 4 muestra al dique rectangular de lado  $1u$  dividido en 900 triángulos, que son los “elementos finitos”.

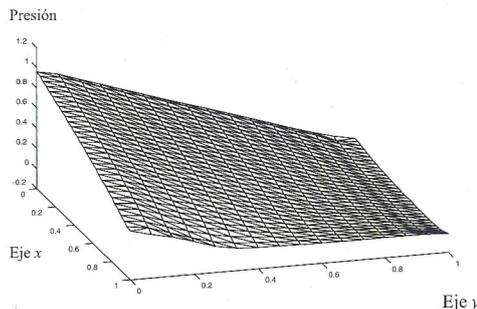


Fig. 5 Gráfica de la presión ( $p = -W_y$ )

La Figura 5, es la grafica de la presión aproximada en cada vértice de los triángulos que conforman las mallas de elementos finitos.

Vemos que se hace cero en aquellas partes que se esperan estén “secas”.

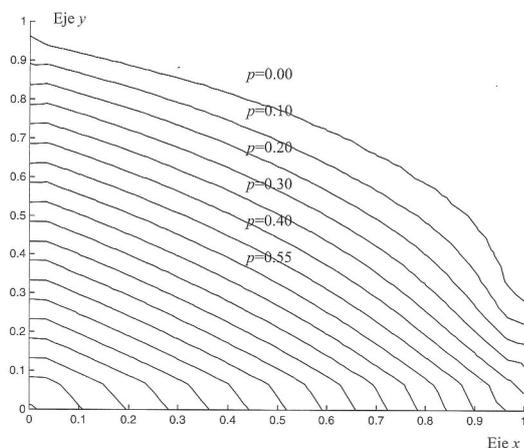


Fig. 6 Curvas de nivel para la presión

La Figura 6, nos muestra las líneas de contorno de presión para valores que van de 0 a 1, las líneas más exteriores están más cercanas a cero, de hecho la curva para  $p=0$ , representa la “frontera libre” aquella que separa la zona húmeda de la zona seca.

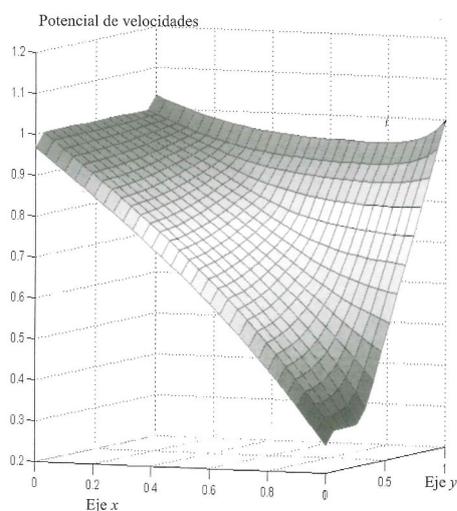


Fig. 7 Gráfica del potencial de velocidad  $\phi$

La Figura 7, nos muestra el potencial de velocidades, esta gráfica es obtenida en base a la estimación de la presión dada por el algoritmo propuesto y la relación (6).

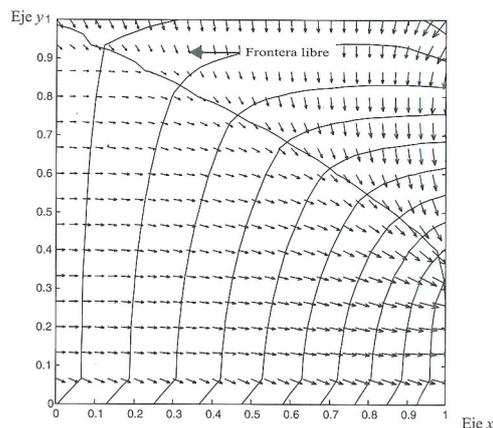


Fig. 8 Gráfica del campo de velocidades y la frontera libre

En base al potencial de velocidades obtenemos, gracias a (3), la Figura 8, que nos muestra el campo de velocidades dentro del dique rectangular.

Tabla 1. Error relativo para  $u^n$  en cada iteración

Iteración	Error relativo
2	0,0035516
3	0,0031863
4	0,0028604
5	0,0025722
6	0,0023155
7	0,0020892
8	0,0018854
9	0,0017054
10	0,0015397
11	0,0013973
12	0,0012723
13	0,0011556
14	0,0010545
15	0,0009603

La Tabla 1 nos muestra el error relativo cometido en cada iteración, vemos que como el error se hace cada vez más pequeño, lo que nos indica que el proceso, como se esperaba, es convergente, y converge a la solución de (23).

### CONCLUSIONES

Se ha formulado una expresión matemática apropiada para modelar el comportamiento de un fluido a través de un medio poroso, obteniéndose con aproximación suficiente tanto la presión como el campo de velocidades.

La técnica matemática propuesta es extensible al tratamiento de otros problemas que involucren inecuaciones variacionales elípticas.

El algoritmo iterativo propuesto es sencillo de implementar y modificar, además de poseer una velocidad de convergencia aceptable.

#### REFERENCIAS

1. **Brenner, S.** "The Mathematical Theory of Finite Element Methods" Ed. Springer Verlag, 1991.
2. **Ekeland, I.** "Convex analysis and Variational Problems" Ed. North-Holland, 1976.
3. **Baiocchi, C.** "Variational and Quasivariational Inequalities" Ed. John Wiley & Sons, 1984.
4. **Mantilla Núñez, I.** "Adaptabilidad de Mallados por Aproximación a la Mecánica de un Fluido". FC- REVCUNI. V. 01. 5,94 – 107, 2001.
5. **Glowinski, R.** "Finite elements and variational inequalities", Technical report, INF-LAB 78010, INRIA-Laboria, Rocquencourt, 1978.
6. **Nakamura, S.** "Numerical Analysis and Graphic Visualization With MATLAB". Primera Edición, 1997.