

ANÁLISIS DE LA CAVITACIÓN EN COJINETES MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS Y EL ALGORITMO DE UZAWA

ANALYSIS OF CAVITATION IN BEARINGS BY FINITE ELEMENTS AND THE UZAWA ALGORITHM

Irla Mantilla Nuñez¹, Salomé Gonzáles Chávez²

RESUMEN

Para el mejor rendimiento y mayor duración de dispositivos o elementos que participan en un sistema de transporte de energía mecánica, éstos requieren de un adecuado proceso de lubricación en las zonas expuestas a fricción: cojinetes, engranajes, cilindro-pistón, etc. Éste proceso es muy importante para el funcionamiento óptimo del sistema, pues, reduce costos de reparación y fallas no programadas. Uno de los problemas frecuentes de la deficiente lubricación es la generada por el fenómeno de Cavitación, por ello es importante estudiar sus efectos bajo condiciones de operación. En el presente trabajo se realiza la formulación y simulación numérica de la Cavitación en cojinetes, considerando la variación de la viscosidad del lubricante en relación con la presión y el espacio de distribución. En otros trabajos realizados sobre este fenómeno, se menciona lo complejo que resultaría desarrollar un proceso numérico en un sistema cartesiano bidimensional, por las dificultades de no linealidad que existen en la formulación para obtener la solución explícita. Considerando algunos resultados de [1, 2 y 3], el presente estudio contribuye con la solución explícita del problema de frontera libre generado; para ello la ecuación diferencial de Reynolds y la aplicación de la Ley de Barus para el efecto viscoso, se reduce a una ecuación en derivadas parciales de tipo Poisson, la cual se transforma en una inecuación variacional elíptica de primera especie sobre un espacio funcional de Sobolev de orden uno. Luego se construye un esquema de resolución numérica sobre un dominio bidimensional computacional, utilizando el método de Galerkin con elementos finitos y un algoritmo de Uzawa mejorado. Finalmente, se presentan los resultados que permiten simular la ubicación de la zona de Cavitación.

Palabras clave. - Cavitación, Cojinetes, Energía mecánica, Galerkin con elementos finitos, Inecuación variacional elíptica, Uzawa

ABSTRACT

For best performance and durability of elements involved in transport system of mechanical energy, they require adequate lubrication process in areas exposed to friction: bearings, gears, cylinder-piston, etc. This process is very important for optimal functioning of the system, thus reducing repair costs and unscheduled failures. One of the frequent problems of poor lubrication is generated by the phenomenon of cavitation. In this work is the formulation and numerical simulation of cavitation in bearings, considering the lubricant viscosity variation, the pressure and distribution space. In other works on this phenomenon, referred to as complex a process that would develop in two dimensional Cartesian system by nonlinearity difficults that exist in the formulation for the explicit solution. Whereas some results of [1, 2 and 3], this study.

¹Magister, Docente Investigadora del Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería, ²Dr. Docente Investigador de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Ingeniería.

contributes with explicit solution of the free boundary problem, for which the Reynolds differential equation and application Barus law to the viscous effect, we reduced to partial differential equation Poisson type, which is transformed into an elliptic variational inequality first kind on Sobolev functional space. Then they built a system of numerical resolution on a two-dimensional computational domain, using the Galerkin finite element and an improved algorithm Uzawa. Finally, the results are presented to simulate the location of Cavitation area.

Key words. - Cavitation, Bearings, Mechanic energy, Galerkin finite elements, Elliptic variational inequation, Uzawa.

INTRODUCCIÓN

En el circuito del fluido de lubricación de un sistema que transmite energía mecánica, como es el caso de los cojinetes o rodamientos, si la cantidad o frecuencia de fluidez del lubricante es insuficiente en algunas zonas, pueden ocurrir desgastes severos en las partes metálicas, pérdidas de energía y sobrecalentamientos. El inestable comportamiento del flujo de lubricante, por los variados cambios de presión entre las zonas lubricada (Ω^+) y no lubricada (Ω_0), produce un cambio brusco de presión generando burbujas de aire o vapor que impactan y malogran a las superficies metálicas del cojinete (ver figura 1). A este fenómeno se le conoce como fallo por cavitación [1 y 2].

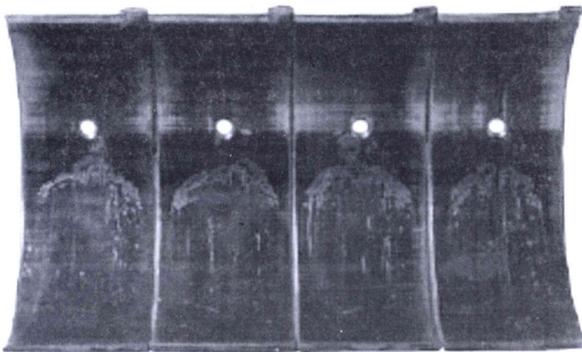


Fig. 1 Efectos de la cavitación en la superficie del cojinete.

Nuestro objetivo es simular la ubicación de la zona de cavitación en cojinetes, para ello se aplica la ecuación de Reynolds [3], que modela el comportamiento de fluidez de una película de lubricante. La ecuación de Reynolds generalizada es no lineal [4]. En el presente caso, considerando una dirección preferencial de desplazamiento del lubricante, el problema se centra en la determinación del campo de presiones en el fluido, lo que conduce a determinar la ubicación de zona

de propensión a la cavitación, previendo su efecto erosivo sobre el metal del cojinete.

Bajo el modelo analizado, la solución matemática de la ecuación de Reynolds, predice la existencia de una zona en la cual la presión hidrodinámica es menor que la presión de saturación del fluido.

La delimitación de la zona cavitada es desconocida "a priori", debiendo determinarse en el proceso de solución [3 y 4]. Matemáticamente este comportamiento lleva a la generación de un problema de frontera libre, dado que no es posible localizar en forma precisa la frontera entre la zona activa (presiones positivas) y la zona cavitada. Básicamente, la inconsistencia radica en que se está utilizando la distribución de presiones que surge de la ecuación de Reynolds aplicada a la zona de cavitación.

Si consideramos el modelo de cavitación de Reynolds, en el que se asume la continuidad del flujo a través de la frontera libre que separa la zona activa de la zona cavitada, este modelo introduce para dicha frontera las condiciones de "localización": $p = \partial p / \partial n = 0$.

En el presente trabajo se determina la solución computacional mediante el modelo de Reynolds, para el fenómeno de cavitación en un proceso de lubricación axial en cojinetes.

El punto importante de este trabajo, es resolver la inecuación variacional de tipo elíptico, IVE [5] mediante el método de elementos finitos, llevándolo a un problema de optimización no lineal el cual se resuelve utilizando el algoritmo de Uzawa [6]. Este enfoque permite visualizar el problema de cavitación en cojinetes de forma automática, simulando la ubicación de la zona de cavitación, lo cual contribuirá tanto para mejorar el diseño como la utilización de estos dispositivos.

SIMBOLOGÍA

- R^n : Espacio real n-dimensional.
- $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega_0$, $\Omega \subset R^2$: Dominio de cálculo, es un conjunto abierto acotado contenido en el espacio bidimensional X x Y real.
- Σ : Frontera libre o zona de separación entre Ω^+ y Ω_0 .
- \vec{n} : Vector normal unitario exterior a la Σ .
- $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{i=1}^2$: Operador gradiente para una función escalar.
- $\Gamma_0 \cup \Gamma = \partial\Omega$: frontera el Ω .
- $\bar{\Omega}$: El conjunto clausura de Ω .
- H^1 : Espacio de Sobolev de orden 1 y de cuadrado integrable
- L: Longitud
- L: forma lineal del espacio dual
- L: Operador Lagrangeano

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Asumiendo que la zona de lubricación esta representada por el conjunto de puntos (dominio de existencia) la cual se muestra en la (figura 2) y el fenómeno de cavitación para un flujo isotérmico incompresible en cojinetes rígidos con alimentación axial (en $x = 0$), se expresa matemáticamente, mediante las siguientes ecuaciones:

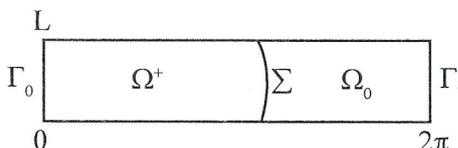


Fig. 2 Zona de lubricación.

Fundamento físico.-

$$\left(\frac{1}{\rho} \right) (p_H) = \left(\frac{1}{\rho} \right) (p_{atm} \pm p_{int}) + \frac{V^2}{2}$$

Donde:

- $p_H = p$: presión Hidrodinámica
- p_{int} : presión interna.
- p_{atm} : presión atmosférica
- V: velocidad del fluido
- ρ : densidad del fluido
- $\gamma = \gamma_0 e^{\alpha p}$ $\alpha = (0.6 + 0.96 \log \gamma) 10^3$ (worster)
- $\gamma = \gamma_0 (1 + Cp)^{16}$ para presiones altas

- γ_0 : viscosidad a presión atmosférica
- γ = viscosidad cinemática

Si se considera en régimen isoterma, permanente y si se desprecia la variación geométrica de las propiedades físicas, entonces la densidad y viscosidad son función exclusivas de la presión y en particular para un fluido a densidad constante y piezoviscoso se puede establecer que la viscosidad varía con la presión.

El modelo de cavitación de Reynolds para un flujo isotérmico incompresible en cojinetes rígidos con alimentación axial (en $x = 0$), se expresa matemáticamente, sobre el dominio que se muestra en la figura, mediante las siguientes ecuaciones:

Consideramos un conjunto abierto $\Omega \subset R^2$, tal que $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega_0$, Sea $p = p(x,y)$ representa a la presión hidrodinámica, p es una función escalar $p: \Omega \subset R^2 \rightarrow R$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\alpha p} h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-\alpha p} h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6v_0 u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.a)$$

$$p > 0 \quad \text{en} \quad \Omega^+ \quad (1.b)$$

$$p = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_0 \quad (1.c)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma \quad (1.d)$$

donde \vec{n} es el vector normal unitario a Σ ,
Por la Ley de Barus

$$\gamma = \gamma_0 e^{\alpha p}$$

Entonces, reemplazando en la ecuación (1) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{-\alpha p} h^3 \frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (e^{-\alpha p} h^3 \frac{\partial p}{\partial y}) = 6\gamma_0 u \frac{\partial h}{\partial x}$$

donde:

- u : velocidad de flujo
- h : Grosor de la película de fluido

Mediante la transformación de Grubin [4] se obtiene una ecuación elíptica en términos de la presión reducida.

$$q(p) = \frac{1 - e^{\alpha p}}{\alpha} : \text{presión reducida}$$

Se reduce a buscar la solución del siguiente problema:

$$\frac{\partial}{\partial x} (h^3 \frac{\partial q}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (h^3 \frac{\partial q}{\partial y}) = 6\gamma_0 u \frac{\partial}{\partial x} (h) \quad (2.a)$$

$$q > 0, \text{ en } \Omega^+ \quad (2.b)$$

$$q = 0; \text{ en } \Omega_0 \quad (2.c)$$

$$q = \frac{\partial q}{\partial \bar{n}} = 0 \text{ en } \sum \quad (2.d)$$

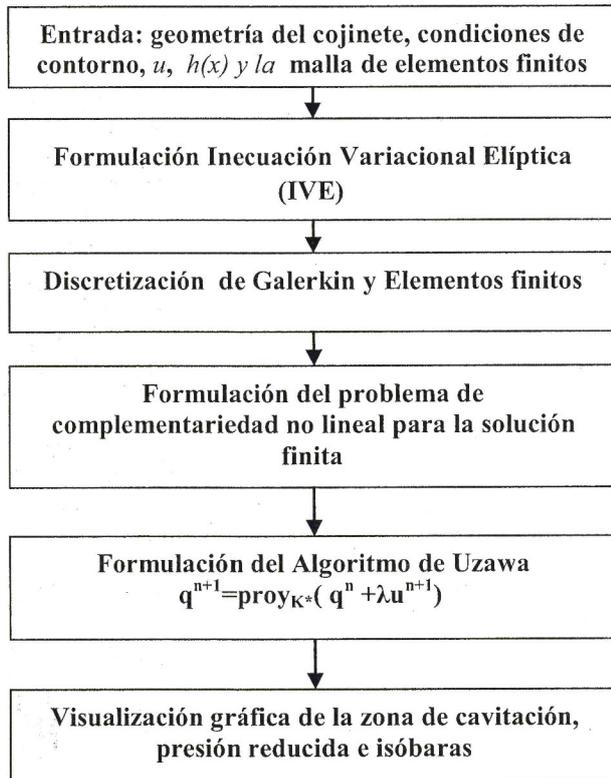
$$q = 0, \text{ en } \Gamma \quad (2.e)$$

CÁLCULO Y RESULTADOS

La ecuación (2.a) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} h^3 (\Delta q) = f(x), & (3.a) \\ \Delta q = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \\ f(x) = 6\gamma_0 u \frac{\partial}{\partial x} h(x) \\ q = 0, \text{ sobre } \Gamma \end{cases} \quad (3.b)$$

Para resolver el problema (3) seguiremos el siguiente esquema:



Sea $H^1(\Omega)$ el espacio de Sobolev de orden 1

Dado el conjunto

$V = H_0^1(\Omega) = \{H^1(\Omega) : v|_{\Gamma} = 0 \text{ c.e.p}\}$ el cual es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$a(q, v) = \int_{\Omega} \nabla q \nabla v dx, \quad x \in \Omega$$

Además para $u, v \in V$:

$$\nabla q \cdot \nabla v = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$V^* = H^{-1}(\Omega) \quad y \quad v \in V$$

Definimos

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq 0 \text{ c.p.d}\}$$

un subconjunto convexo de V .

Propiedades de la forma $a(.,.)$

Sea H un espacio de Hilbert $a(.,.): H \times H \rightarrow \mathbb{R}$

i) $a(.,.)$ es bilineal si cumple::

$$a(\mu_1 q_1 + \mu_2 q_2, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \sum_{i,j=1}^2 \mu_i \lambda_j a(q_i, v_j)$$

$$\forall q_i, v_j \in H$$

ii) $a(.,.)$ es continua si

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad |a(q, v)| \leq M \|q\|_H \|v\|_H \quad \forall q, v \in H.$$

iii) $a(.,.)$ es simétrica si

$$a(q, v) = a(v, q).$$

iv) $a(.,.)$ es coersiva o H-elíptica si

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \quad a(q, v) \geq \alpha \|q\|_H^2 \quad \forall q \in H.$$

Proposición 1 .- Si $a(q, v)$ es una forma bilineal continua, simétrica y coersiva en H , entonces $a(.,.)$ es un producto interno y define la norma sobre el espacio H , es decir:

$$\langle q, v \rangle_H = a(q, v) \quad , \quad \|q\|_H = \sqrt{a(q, q)}$$

La demostración de este resultado puede verse en [5 y 6].

Proposición 2.- Sea H un espacio de Hilbert, $K \subset H$ un conjunto cerrado y convexo $L \in H'$ y $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(v) = \frac{1}{2} \|v\|_H^2 - L(v)$$

Entonces existe $q_0 \in K$, tal que $f(q_0) = \inf_{v \in K} f(v)$.

La demostración de este resultado puede verse en [5]. Volviendo al problema de cavitación de Reynolds, asumiendo que la función $h(x)$ es una función del espacio de funciones de cuadrado integrables sobre Ω , si tomamos una función del espacio de funciones infinitamente diferenciables, de soporte compacto y si multiplicamos a toda la ecuación (3.a) por esta función y aplicando; la segunda identidad de Green para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, las condiciones de frontera conocidas en (3.b), entonces el problema dado se transforma en una inecuación variacional elíptica de primera especie muy similar a la expresada en el siguiente resultado.

Proposición 3.- Sean H un espacio de Sobolev-Hilbert y su dual H' , una forma lineal $L \in H'$ y $K \neq \emptyset$ un subconjunto convexo y cerrado de H , entonces existe una función $q_0 \in K$ tal que

$$\langle q_0, q_0 - v \rangle_H \leq L(q_0 - v) = \forall v \in H.$$

Este resultado significa que la Inecuación Variacional Elíptica (IVE) de primera especie es equivalente al siguiente problema variacional:

$$(PV) \begin{cases} a(q, v - q) \geq L(v - q), \forall v \in K \\ q \in K \end{cases} \quad (4.a)$$

Donde:

$$a(q, v - q) = \int_{\Omega} h^3 \nabla q \nabla (v - q) dx dy \quad (4.b)$$

$$L(v - q) = -6\gamma_0 \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x} h(v - q) dx dy, \forall v \in K \quad (4.c)$$

Para ver la existencia y unicidad de solución del problema (PV) aplicaremos el siguiente teorema.

Teorema de Lions Stampacchia.- Sea H un espacio de Hilbert, H' el dual de H , $K \subset H$ un conjunto convexo y cerrado de H , $a(.,.)$ es una forma bilineal, acotada y coersiva y $L(.)$ es una forma lineal continua y acotada. Entonces, el problema variacional (PV) tiene solución única en sentido débil.

Para hallar la solución aproximada del problema (PV), se utiliza el método de Galerkin el cual consiste en suponer lo siguiente:

$$q^e_h(x, y) = \sum_{i=1}^3 c_i \varphi_i(x, y), \quad (5)$$

Entonces:

$$a(q^e_h, v - q^e_h) \geq L(v - q^e_h) \quad \forall v \in K_h \subset K \quad (6)$$

discreta sobre cada elemento e de la malla de elementos finitos (ver figura 3) del dominio computacional admisible, Ω_h , se transforma en la búsqueda de una solución finita.

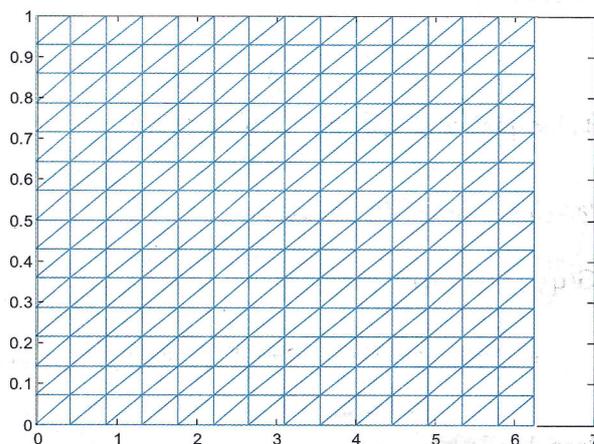


Fig. 3 Malla regular de elementos finitos Ω_h .

Las funciones $\varphi_i(x, y)$, son elementos de la base finita del espacio de aproximación.

Asumiendo que $H = V$, este procedimiento reduce a resolver el siguiente problema de optimización convexo:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Hallar } \bar{q} \geq 0, \\ & \text{tal que: } J(\bar{q}) = \min_{U \geq 0} J(U) \\ \text{Sea } & J(U) = \frac{1}{2} U^T A U - U^T F \\ & A = [A_{ij}] = [a(\varphi_i, \varphi_j - \varphi_i)] \\ & F = [L(\varphi_j - \varphi_i)] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

U es el vector solución, J es el funcional convexo, diferenciable hasta el segundo orden.

$\bar{q} \in R^n$, representa la solución óptima del problema, como K_h es convexo, cerrado y acotado en R^n .

Para resolver este problema, se aplica el siguiente algoritmo:

Algoritmo de uzawa

Paso 1.- Definir el funcional Lagrangeano $L(U)$, Denotando por $q = \bar{q} \in R^n$, se define este funcional

$$L(U, q) = J(U) + (-U)^T q \quad (8)$$

Paso 2.- A cada valor de q se le asocia el vector

$$U_q = A^{-1}(F+q) \in R^n \quad (9)$$

Talque $AU_q = F + q$, entonces el problema se reduce a:

$$\text{Hallar } q \text{ tal que } L(U_q, q) = \inf_{U \in R^n} L(U, q) \quad (10)$$

Paso 3.- Definir $G(q)$ tal que:

$$\begin{aligned} G(q) &= L(U_q, q) \\ &= \frac{1}{2} q^T A^{-1} q - q^T (A^{-1} F) + \frac{1}{2} F^T A^{-1} F \end{aligned} \quad (11)$$

Paso 4.- Hallar

$$\nabla G(q) = -A^{-1} q - A^{-1} F = -U_q \quad (12)$$

Paso 5.- Mediante un proceso iterativo de

s - etapas; $s = 0, 1, \dots$

Se elige $q_i^0 > 0; \forall i = 1, \dots, n$

En la etapa s -ésima, resolver:

$$Aq^s = F + q^s, \quad s = 1, \dots \quad (13)$$

Paso 6.-

$$\begin{aligned} q_i^{s+1} &= \max \{0, q_i^s + \rho(\nabla G(q^s))_i\} \\ &= \max \{0, q_i^s + \rho(-U_q^s)_i\} \end{aligned} \quad (14)$$

donde $(-U_q)_i$ es la componente de U_q en la etapa s .

$\rho < 2\mu$, donde μ es el autovalor de menor módulo de la matriz A .

Para mejorar este resultado se propone aplicar en la etapa s , un esquema de descenso con máxima pendiente a U_q , es decir:

$$U_q^{s+1} = U_q^s - \rho(AU_q^s - F - q^s) \quad (15)$$

Luego volver al paso 6 y obtener:

$$q_i^{s+1} = \max \{0, q_i^s + \bar{\rho}(-U^{s+1})_i\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

donde ρ y $\bar{\rho}$ se condicionan para la convergencia.

Datos de entrada

Para la obtención de los resultados ver figuras, se consideran como datos de entrada a:

- Diferencia de radios C : 0.6
- Coeficiente de piezoviscosidad α : 0.6
- Longitud del cojinete : 1
- Velocidad del flujo u : 60
- Viscosidad cinemática γ_0 : 100
- Número de nodos en el eje X : 15
- Número de nodos en el eje Y : 15

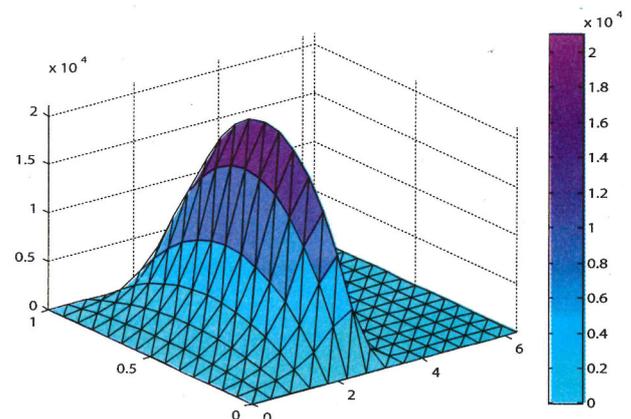


Fig. 4 Presión reducida.

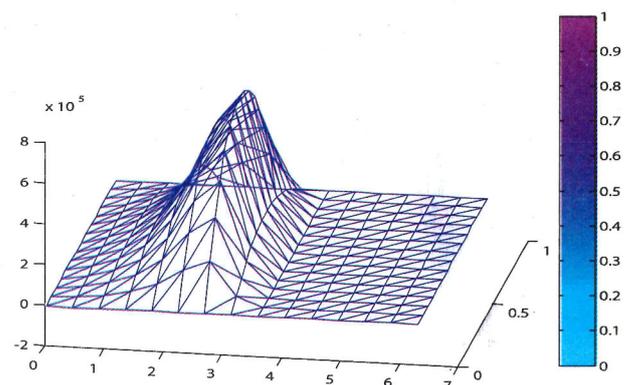


Fig. 5 Presión reducida con malla regular.

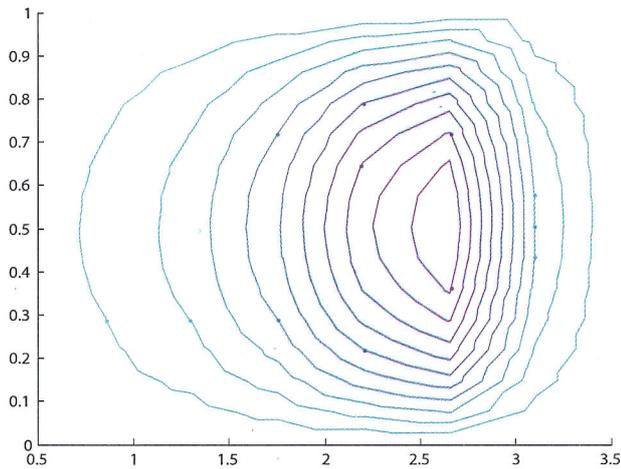


Fig. 6 Isóbaras en la zona de cavitación.

CONCLUSIONES

La formulación de la IVE es conveniente puesto que a partir de ésta se garantiza la existencia y unicidad de solución del problema.

La transformación de Grubin es muy importante para llevar a la formulación variacional del problema elíptico, así como también facilita a la cuantificación del coeficiente de Piezoviscosidad α .

El Método de Elementos Finitos combinado con el algoritmo de Uzawa, permite simular la ubicación de la zona de cavitación sobre el dominio $(0 < x < \pi) \times (0 < y < 1)$, así como la presión reducida (ver figuras 4 y 5) y las isóbaras (ver figura 6) resultados que se esperaban obtener.

La visualización de la zona de cavitación mediante la simulación numérica desarrollada en el presente

trabajo, puede contribuir al mejoramiento en el diseño y adecuada operación de cualquier tipo de cojinete sometido a grandes cargas mecánicas.

REFERENCIAS

1. **Pinkus, O., Sternlicht, B.**, "Theory of Hydrodynamic Lubrication". McGraw Hill Book Company, 1961. pp. 41-46, New York.
2. **Dowson, D., Higginson, G. R.**, "Elasto-Hydrodynamic Lubrication". 1983. pp. 409-430, Printed in Great Britain.
3. **Calvo, N., Durany, J., Vázquez, C.**, "Comparación de Algoritmos Numéricos en Problemas de Lubricación Hidrodinámica con Cavitación en Dimensión Uno". Universidad de Vigo, 1997. pp 185-210, España.
4. **Durany, J. Vazquez, C.**, "Numerical Aproroach of lubrication problems in Journal bearing devices with axial supply, Numerical methods in Egeineering", Elsevier Science Publishers B.V. pp. 839-844, 1992. España.
5. **Brezis, H.**, "Analyse Fontionnelle, théorie et applicationons", 1983. pp. 81-84 Masson, Paris.
6. **Mantilla, I., Roca, L.**, "Inecuaciones variacionales y quasivariacionales con elementos finitos", Revista TECNIA, Vol. 15, N° 2, pp 83-91, Universidad Nacional de Ingeniería, ISSN N° 0375-7765, 2005, Lima, Perú.

Correspondencia: irlamn@uni.edu.pe

Recepción de originales: Abril 2008

Aceptación de originales: Junio 2008