

# ANÁLISIS DEL CONTACTO Y DE LA GEOMETRÍA DEL DIENTE EN LOS ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS INTERIORES Y SU INFLUENCIA EN LA RESISTENCIA DE DICHS ENGRANAJES

## ANALYSIS OF THE CONTACT AND THE GEOMETRY OF THE STRAIGHT TEETH IN THE INTERNAL CYLINDRICAL SPUR GEARS AND THEIR INFLUENCE IN THE RESISTANCE OF THESE GEARS

Edwin Asención Abregú Leandro<sup>1</sup>, Ana María Becerra Ferreiro<sup>2</sup>, Jorge Laureano Moya Rodríguez<sup>3</sup>, Rafael Goytisoló Espinosa<sup>4</sup>, Ángel Isaac Moreno Delfrade<sup>5</sup>.

### RESUMEN

*Los engranajes cilíndricos de dientes rectos interiores tienen sus particularidades con respecto a los engranajes cilíndricos de dientes rectos exteriores en cuanto a su geometría, características del contacto y duración del mismo. Estos engranajes están sometidos a los mismos tipos de fallas que los engranajes cilíndricos de dientes rectos exteriores, aunque producto de la geometría y forma del diente, estas fallas son menos frecuentes que en los exteriores. En el presente trabajo se hace un estudio de las características particulares del contacto en los engranajes cilíndricos de dientes rectos interiores, analizándose aspectos tales como: tensiones de contacto, coeficiente de recubrimiento e influencia de la corrección del dentado en la disminución de las fallas de estos engranajes.*

*Palabras clave.*-Diseño de elementos de máquinas, Engranajes interiores, Tensiones, Factor de recubrimiento, Corrección

### ABSTRACT

*The straight teeth of the internal cylindrical spur gears have their particularities in relation to the geometry of the straight teeth of the external cylindrical spur gears, contact characteristics and service life. These gears are subject to the same kind of failures. This paper deals the study of the particular characteristics of the contact in the straight internal gears, analyzing aspects such as: contact stress, overlap ratio and influence of correcting the dentate in reducing failures of these gears.*

*Key words.*- Machine design, Internal gears, Stress, Overlap factor, Correction.

### INTRODUCCIÓN

En los últimos años el uso de las correcciones en las transmisiones por engranajes (engranajes no estandarizados)

ha ido adquiriendo cada vez más importancia. Muchos textos de Teoría de Mecanismos para explicar la corrección hablan esencialmente de un desplazamiento de la herramienta y no relacionan

---

<sup>1</sup>MSc.Ing. Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima- Perú, <sup>2</sup> Dr. Ing. Universidad Autónoma de Zacatecas, México, <sup>3</sup> Dr. Ing. Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas– Cuba, <sup>4</sup>Dr. Ing. Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad “Carlos Rafael Rodríguez” de Cienfuegos – Cuba, <sup>5</sup> Dr. Ing. Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas - Cuba.

directamente la corrección con el cambio de diámetro del semiproducto bruto donde se va a tallar la rueda dentada [1].

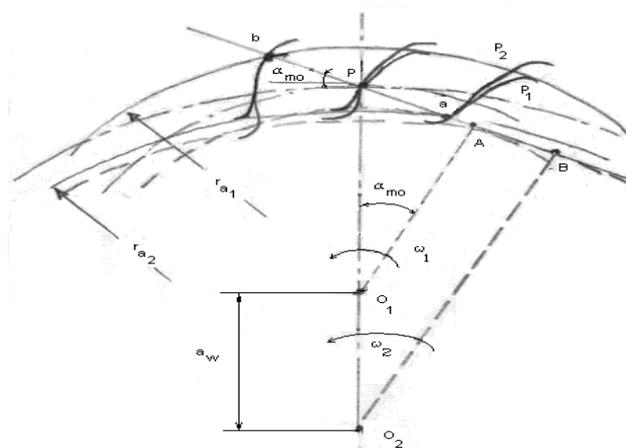
Para comprender a cabalidad este fenómeno hay que remontarse a dos conceptos básicos estudiados en los cursos de pregrado de Teoría de Mecanismos: Cremallera básica y propiedades de la envolvente. No es difícil encontrar artículos sobre correcciones en engranajes cilíndricos de dientes rectos exteriores [2], sin embargo, hay poca información sobre el uso y aplicación de las correcciones del dentado en engranajes cilíndricos de dientes rectos interiores.

La corrección del dentado no solamente se emplea para resolver problemas geométricos de ajuste de la distancia entre centros, sino también para mejorar el comportamiento y la eficiencia de las transmisiones por engranajes. Sobre la influencia de la corrección en la reducción o eliminación de las fallas en los engranajes cilíndricos de dientes rectos interiores, no se encontró ninguna información en la literatura disponible.

### COEFICIENTE DE RECUBRIMIENTO Y DISTRIBUCIÓN DE LA CARGA EN ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS INTERIORES

Dadas las características particulares de los engranajes cilíndricos de dientes rectos interiores, su coeficiente de recubrimiento será mayor que el de los engranajes cilíndricos de dientes rectos exteriores. Si la distancia de centros entre las ruedas cambia (aumenta), las circunferencias primitivas en ambas ruedas se moverán hacia afuera del centro.

El resultado del aumento de las circunferencias de paso, es una reducción en el coeficiente de recubrimiento, no obstante esto en los engranajes interiores no es importante, ya que su coeficiente de recubrimiento es de magnitud mucho mayor que en los engranajes exteriores. En la Fig. 1, se muestra el proceso de engranamiento de una pareja de engranajes cilíndricos de dientes interiores para la determinación del coeficiente de recubrimiento en engranajes de dientes rectos interiores.



**Fig. 1** Proceso de engranamiento para la determinación del coeficiente de recubrimiento en engranajes de dientes rectos interiores.

La expresión para determinar el coeficiente de recubrimiento en los engranajes interiores se puede obtener con el siguiente procedimiento:

$$\epsilon = \frac{ab}{t \cos \alpha_c} = \frac{ab}{\pi \cdot m \cdot \cos \alpha_c} \quad (1)$$

$$ab = Ab + AB - Ba,$$

$$Ab = \sqrt{re_1^2 - rb_1^2},$$

$$AB = a_w \cdot \text{sen} \alpha_w$$

$$Ba = \sqrt{re_2^2 - rb_2^2}$$

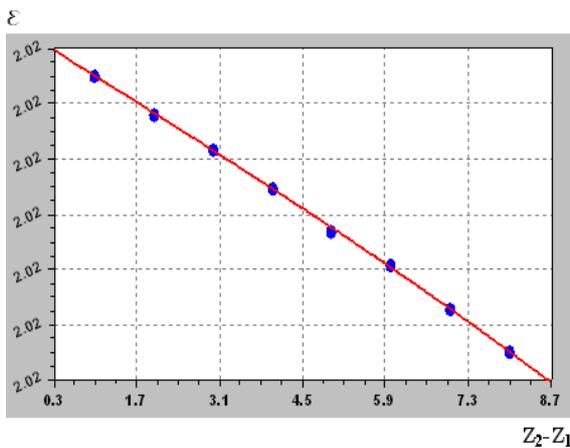
Entonces:

$$ab = \sqrt{re_1^2 - rb_1^2} - \sqrt{re_2^2 - rb_2^2} + a_w \cdot \text{sen} \alpha_w$$

y por tanto, el coeficiente de recubrimiento queda expresado como:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{re_1^2 - rb_1^2} - \sqrt{re_2^2 - rb_2^2} + a_w \cdot \text{sen} \alpha_w}{\pi \cdot m \cdot \text{cos} \alpha_c} \quad (2)$$

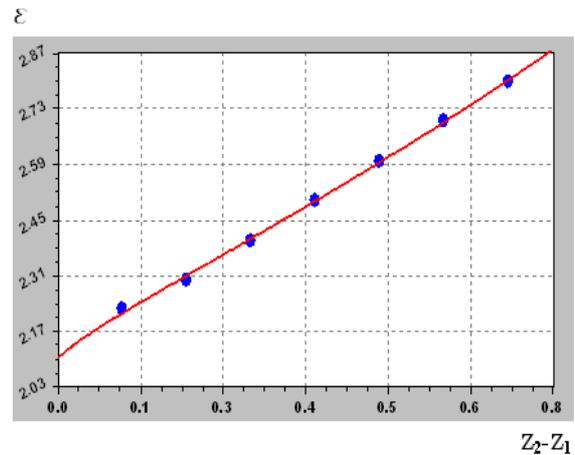
Parte importante de los aportes de este trabajo, es la evaluación de la variación del coeficiente de recubrimiento de la transmisión en función de los parámetros de la ecuación (2). Para ello se elabora una tabla en Excel y se grafica. Ver Fig.2.



**Fig. 2** Variación del coeficiente de recubrimiento en función de la diferencia entre los números de dientes.

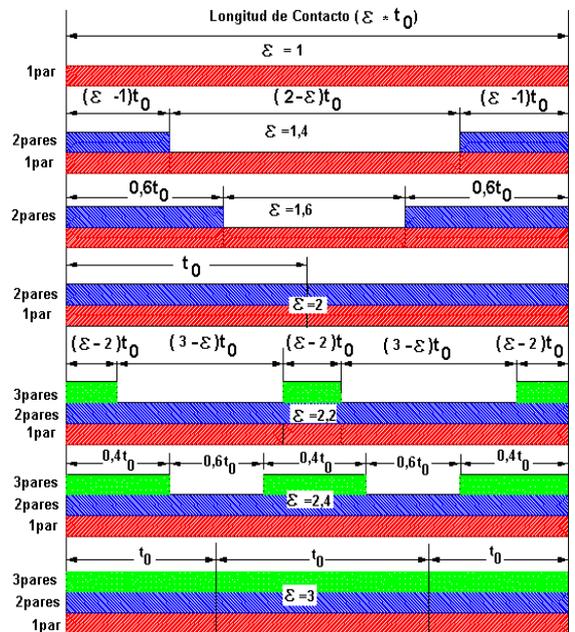
En la Fig. 2, se muestra la variación del coeficiente de recubrimiento en función de la diferencia entre los números de dientes. A medida que se hace mayor esta diferencia disminuye el factor de recubrimiento, pero siempre manteniéndose por encima de 2 unidades. Para construir los gráficos correspondientes al coeficiente de recubrimiento en función de la diferencia entre los números de dientes de los engranajes cilíndricos de dientes rectos interiores, se suponen dientes rígidos.

En tanto, para ver la variación del coeficiente de recubrimiento en función de los coeficientes de corrección, se supone que se da toda la corrección al piñón. Esto, permite apreciar que a medida que aumenta la corrección, aumenta el factor de recubrimiento, el cual, siempre se mantiene igual por encima del valor 2 como se aprecia en la Fig. 3.



**Fig. 3** Variación del coeficiente de recubrimiento dando toda la corrección a piñón.

Habiendo revisado las referencias [3, 4, 5 y 6], y participado en los foros de discusión en Internet, no se encontraron los gráficos de distribución de la carga para los engranajes cilíndricos de dientes rectos interiores, siendo entonces, inédito la gráfica mostrada para diferentes factores de recubrimiento, ver Fig. 4.



**Fig.4** Gráfico de distribución de la carga en engranajes cilíndricos de dientes rectos interiores en función del coeficiente de recubrimiento.

## FALLAS EN LAS TRANSMISIONES POR ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS INTERIORES

Al igual que en el caso de las correcciones, existe una amplia información sobre las fallas en los engranajes cilíndricos de dientes rectos interiores, inclusive libros enteros sobre esta temática, sin embargo no existe ni una sola foto de una falla en engranajes cilíndricos de dientes rectos interiores.

Las transmisiones por engranajes cilíndricos de dientes rectos interiores, pueden sufrir múltiples deterioros durante su funcionamiento, no obstante las fallas más comunes según las referencias [1, 7 y 8] son:

Picadura o careado.- Se caracteriza por el desprendimiento de partículas de la superficie del diente producto de la acción del lubricante. Estos desprendimientos aparecen en la zona cercana al polo por debajo de la circunferencia primitiva.

Este fenómeno se debe a que aquí es donde mejor puede desarrollarse la grieta sin "limarse", ya que la velocidad de deslizamiento es muy pequeña.

Desgaste.- Esta falla es propia de las transmisiones no lubricadas, y se caracteriza por la disminución del espesor del diente en la zona de la cabeza y del pié que es donde mayor velocidad de deslizamiento existe.

Deformación plástica de la superficie de los dientes o fluencia friccional.- Esta falla se produce en transmisiones altamente cargadas, y se caracteriza por la fluencia del material hacia los extremos o centro del diente independientemente de si la rueda es conducida o conductora.

Fractura del diente.- La falla se produce tanto en transmisiones lubricadas como no lubricadas y puede deberse tanto a la fatiga como a sobrecargas instantáneas, ocurre en el pié del diente.

Cuando se presenta una falla en una transmisión por engranajes el proyectista trata de resolverla inmediatamente con la elevación de la calidad del material, sin embargo; muchas fallas se pueden retardar e inclusive evitar con ligeras modificaciones geométricas, principalmente a través del uso de las correcciones.

## INFLUENCIA DE LA CORRECCIÓN EN LA FALLA POR PICADURA DE LAS TRANSMISIONES POR ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS INTERIORES

La picadura o fatiga superficial, consiste en el desprendimiento de partículas de metal de las superficies de trabajo de los dientes, asociada a las sobre tensiones de contacto de carácter cíclico, en presencia del lubricante en la transmisión [9].

Durante el funcionamiento de la transmisión, según sea la magnitud de las tensiones de contacto, se desarrollan en la superficie grietas de fatiga que tienen su origen en defectos de la superficie o del interior del metal. La orientación de las mismas está íntimamente relacionada con las fuerzas de fricción sobre la superficie, de suerte que las grietas, una vez desarrolladas mediante un proceso de fisuración progresiva quedan orientadas en la dirección de las fuerzas de fricción. Dado que la orientación de estas fuerzas sobre la rueda conductora, es diferente y contraria al de la conducida en las zonas de la cabeza y del pié del diente respectivamente, las fisuras de fatiga se desarrollan en la dirección de estas fuerzas.

El desarrollo posterior de las grietas, una vez que alcanzan la superficie, están íntimamente relacionados con la presencia del lubricante en la transmisión. El contacto comienza en el pié del diente del piñón y la cabeza de la corona se va extendiendo hacia la cabeza del piñón y el pié de la corona.

Esto determina que las grietas que se encuentran en el pié de los dientes de ambas ruedas entran en la zona de contacto por su abertura exterior, de manera que el aceite que se encuentra en el interior de la grieta queda bloqueado y la presión abriéndola.

Este proceso al repetirse sucesivamente provoca el desprendimiento de las partículas de metal. Al mismo tiempo, las grietas que se encuentran en las superficies de la cabeza de los dientes entran en contacto por el fondo y durante la rodadura el aceite es desalojado del interior. En esta situación, las grietas no experimentan la presión del aceite y no se desarrollan los hoyos de picadura.

La picadura, sólo se desarrolla en el pie de los dientes, fundamentalmente en la zona próxima al polo donde la carga específica es mayor.

Este proceso de picadura está directamente relacionado con la presencia de las tensiones de contacto de carácter cíclico que son, en definitiva las que dan origen a las grietas de fatiga. Cualquier modificación de la geometría que disminuya la magnitud de las tensiones de contacto reduce la posibilidad de aparición de estas grietas y disminuye la tendencia de la superficie a la destrucción por picadura.

En las transmisiones por engranaje cilíndricos de dientes rectos interiores las tensiones de contacto se determinan según la ecuación de Hertz, considerando las superficies de los dientes en las proximidades de los puntos de contacto como un cilindro dentro de otro [2,10 y 11].

Para este caso:

$$\sigma_{sup} = 0,418 \sqrt{\frac{q \cdot E}{\rho}} \quad (3)$$

Dado que el módulo de elasticidad  $E$  es constante, las tensiones de contacto dependen de la carga específica  $q$  y del radio de curvatura reducido  $\rho$ . La expresión del radio de curvatura reducido en este caso será:

$$\rho = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \quad (4)$$

El término  $\rho_2 - \rho_1 = AB = constante$  (ver Fig. 5), por lo que el radio de curvatura reducido es una función directa del producto  $\rho_2 \rho_1$ , y éste alcanza su valor máximo cuando este producto sea máximo.

Para un mismo valor del módulo y de los números de dientes del piñón y la corona este producto aumenta a medida que aumentan  $\rho_1$  y  $\rho_2$ .

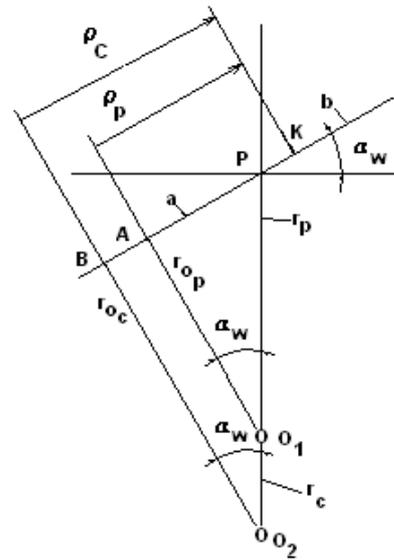
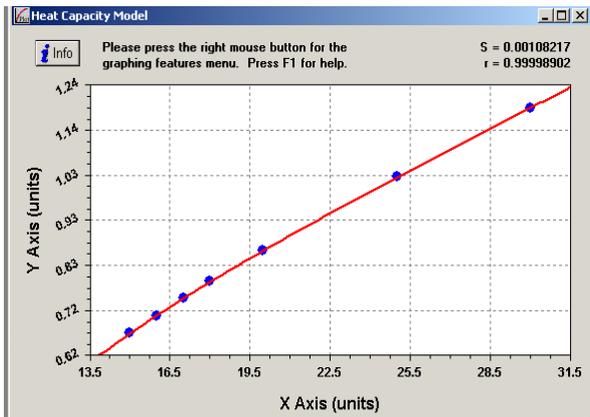


Fig. 5 Línea práctica de engranaje.

Estos valores aumentan corrigiendo positivamente ambas ruedas, manteniendo la distancia entre centros (corrección de altura) o aumentándola (corrección angular). El efecto de la corrección positiva es precisamente mover el punto  $K$  hacia la parte superior derecha. El máximo valor de  $\rho_1$  y  $\rho_2$  se alcanza en  $b$ , es decir, donde el radio exterior del piñón corta la línea de engranaje. Por tanto el valor máximo del radio de curvatura reducido va a estar delimitado por el aumento máximo permisible del radio exterior del piñón. Para obtener este valor hay que obtener a su vez el valor máximo de corrección positiva que puede admitir el piñón, garantizando que  $S_e / m \geq 0.25$ . Para conocer este valor se desarrolló el correspondiente algoritmo y programa de computación en Borland Delphi para obtener dichos resultados y posteriormente en el Curve Expert para Windows se graficaron los resultados y se halló la correspondiente ecuación de regresión.

En la Fig. 6 se muestra la curva del valor de corrección máximo en función del número de dientes de acuerdo al modelo matemático al que corresponde.

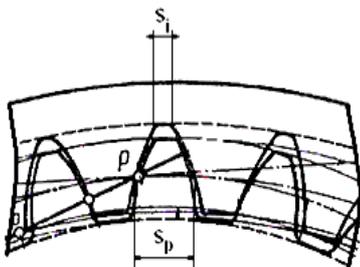


**Fig. 6** Variación del coeficiente máximo de corrección (eje Y) en función del número de dientes del piñón (eje X).

Así, el coeficiente de corrección máximo que admite el piñón se ajusta a la siguiente expresión:

$$X_{1max} = 0.3156 + 0.03Z - \frac{21.4}{Z^2} \quad (5)$$

Para la corona interior habría de hacerse un procedimiento similar, pero en este caso se procedió con un chequeo atípico que no aparece en la bibliografía relacionada con las transmisiones por engranajes, se trata de verificar qué sucede con el huelgo del fondo del diente de la corona por la circunferencia interior  $S_i$ , Fig. 7.



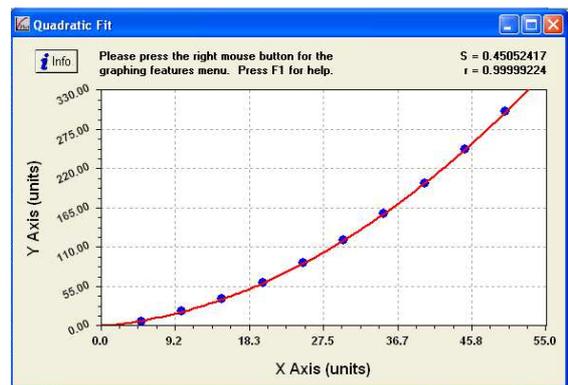
**Fig. 7** Entorno a la determinación del valor máximo de corrección positiva que se puede dar a la corona interior

Para determinar este valor se utilizó un diagrama de bloque muy parecido al caso del piñón, pero teniendo en cuenta el espesor del diente por el diámetro interior de la corona. Comparando ambos diagramas de bloque, se puede apreciar la similitud en la forma de los mismos y además en las expresiones que contienen, ya que el ángulo interior en la corona es equivalente al concepto de ángulo exterior en el piñón y el espesor del diente

de la corona por la circunferencia interior es equivalente, como concepto, al espesor del diente del piñón por la circunferencia exterior.

Para evaluar el valor máximo de corrección positiva que admite la corona se realiza un programa similar al caso del piñón, arrojando resultados similares, pero ligeramente inferiores del valor máximo de corrección positiva que se le puede dar al piñón; como es lógico, esto se debe a que la corona tiene uno o dos dientes más. Por tanto el valor máximo del radio de curvatura posible a obtener dependerá precisamente del valor máximo de corrección que se le pueda dar al piñón.

En la Fig. 8 se muestra la variación del radio de curvatura reducido (eje y) en función del radio de curvatura del piñón (eje x).



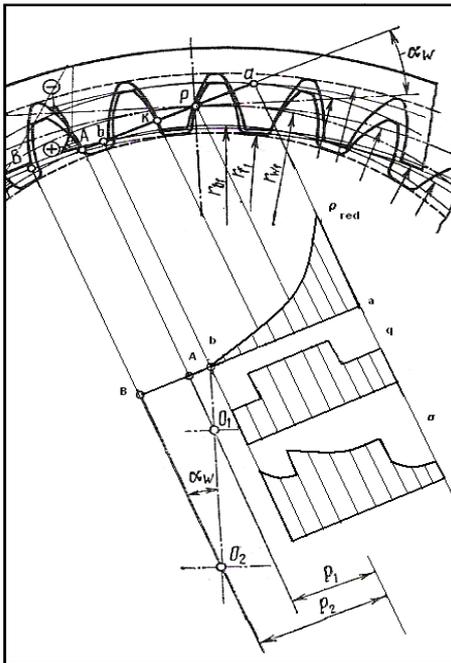
**Fig. 8** Variación del radio reducido en función del radio de curvatura del diente del piñón.

El modelo matemático, es una función cuadrática expresada de la siguiente manera:

$$\rho = -0,566 + 1,03 \rho_1 + 0,99 \rho_1^2 \quad (6)$$

En la Fig. 9 se muestra la curva de variación del radio de curvatura reducido a lo largo de la línea teórica de engranaje. En el caso de los engranajes cilíndricos de dientes rectos interiores la carga específica varía a lo largo de la línea práctica de engranaje. Si se simplifica el esquema de variación de la carga específica y se considera que ésta varía de  $q/2$  a  $q$ , se pueden obtener las curvas de variación de las tensiones de contacto. De este análisis se desprende que para obtener el valor mínimo de las tensiones de contacto, es necesario lograr un desplazamiento de la línea práctica de

engranaje, mediante una corrección tal que ubique la misma lo más lejano posible de los puntos de la línea teórica de engranajes. Debe recordarse que esto está limitado por la corrección máxima positiva que se le puede dar al piñón, por tanto el valor del coeficiente de corrección que garantiza la máxima resistencia a la picadura coincide con el valor máximo de corrección que se le puede dar al piñón.



**Fig. 9** Variación del radio reducido y de las tensiones de contacto a lo largo de la línea de engranajes.

### CONCLUSIONES

La corrección de altura y la corrección angular positiva favorecen la resistencia de las transmisiones cilíndricas de dientes rectos interiores tanto a la picadura como al desgaste y a la fractura.

La forma de aumentar la resistencia de estas fallas es alejando lo más posible la línea práctica de engranaje de la línea teórica, mediante la corrección positiva de ambas ruedas.

El valor máximo de resistencia que se puede alcanzar depende del valor máximo de corrección que admitan tanto el piñón como la corona.

En el caso particular de la corona se da un caso “sui generis” en las transmisiones por engranajes, al tener que comprobar que el espesor del diente por la circunferencia interior sea mayor que 0.25m.

Se construyeron dos prototipos de reductores de ciclo de engranajes con perfil envolvente para la industria, que se encuentran funcionando, uno de ellos en una panadería de la ciudad de Santa Clara, con buenos resultados.

### REFERENCIAS

1. **Baranov, G. G.**, “Curso Breve de Teoría de Mecanismos”. Editorial MIR. Moscú 1987.
2. **International Standardization Organization ISO 6336, Draft International Standard** “Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears”, Geneva, 1996.
3. **Buckingham, E.**, “Manual of Gear Design”. Editorial Industrial Press Inc. New York 1980.
4. **Dudley, D W.** “GEAR Handbook”, Mc Graw-Hill. Book Company 1985.
5. **Airapetov, E. L.**, “Influencia de las deformaciones elásticas de los dientes en los parámetros de contacto de los dientes en transmisiones cilíndricas de dientes rectos”. Revista Viestnik Mashinostroienia, Moscú No 8, 1990.
6. **Andersson A.**, “An Analytical Study of the Effect of the Contact Ratio on the Spur Gear Dynamic Response”, ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 122, año 2000, pp. 508-514.
7. **Henriot G.**, “Manuale Pratico degli Inganaggi”. Editorial Tecniche Nuove, Milano 1993.
8. **Kudriatzev, V. N.**, “Elementos de Máquinas”. Editorial Mashinostroienie. Leningrado. 1980
9. **Zirpke K. Z.**, “Veb Fachbuch Verlag”. Leipzig, 1980.
10. **Spotts M.F.**, “Design of machine elements”. Editorial Prentice Hall. Englewood Cliffs. New Jersey 1990.
11. **Litvin F. L.** “Applied Theory of gearing: State of the art” ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 117, No 2, June 1995, pp 128-134.

Correspondencia: eabregu2003@yahoo.es