

Fuerza Electromotriz Inducida en un Magnetómetro de Muestra Vibrante en la Aproximación Dipolo-Espira

L. M. León Hilario[†] y Dámaso Laura C[‡]

Grupo de Materiales Nanoestructurados. Facultad de Ciencias.

Universidad Nacional de Ingeniería;

[†]mleon@uni.edu.pe, [‡]dlauracc@uni.edu.pe

Recibido el 16 de Julio del 2015; aceptado 30 de Julio del 2015

Hoy en día, el estudio de las propiedades magnéticas de muchos materiales se realizan a partir de su caracterización y obtención de sus curvas de histéresis. Una de las técnicas más utilizadas para obtener dichas curvas es a partir de la Magnetometría de Muestra Vibrante (VSM, por sus siglas en inglés). En este trabajo se calcula numéricamente la fuerza electromotriz (*f.e.m*) inducida en bobinas con diferentes geometrías, usando el modelo desarrollado por Bragg [3]; en el cual se considera como muestra magnética un dipolo oscilando de manera armónica.

Palabras Claves: fuerza electromotriz, dipolo magnético, histéresis magnética.

The study of magnetic properties of many materials nowadays is based on the characterization of their hysteresis curves. One of the most used techniques to obtain these curves is Vibrating Sample Magnetometry (VSM). In this work, we numerically compute the electromotive force (emf) induced in coils with different geometries, using the Bragg model [3], in which the magnetic sample is a harmonically oscillating dipole.

Keywords: induced electromotive force, magnetic dipole, magnetic hysteresis.

1 Introducción

La mayoría de materiales que tienen aplicación tecnológica son magnéticos. Por ejemplo, una de las aplicaciones más conocidas de los materiales magnéticos es su capacidad de almacenar información en los discos rígidos de las computadoras. Estos dispositivos están compuestos de regiones fáciles de magnetizar en una u otra dirección, generando un código digital que será leído por un cabezal magnético de lectura.

Las propiedades de un material magnético se pueden obtener observando su curva de histéresis. Ésta nos describe la forma en la que se va magnetizando un material en función de un campo magnético externo aplicado. Dependiendo de la forma de su curva de histéresis, se puede clasificar a los materiales magnéticos según su aplicación, tales como sensores de campo magnético, medios magnéticos para el almacenamiento de información, imanes permanentes, entre otras [1].

Una manera de obtener la histéresis de un material es usando un magnetómetro de muestra vibrante, el cual es un dispositivo que consiste en un arreglo de bobinas fijas y una muestra magnética vibrando cerca a estas. Debido a la ley de Faraday, al conectar un voltímetro a las bobinas se registrará una fuerza electromotriz dependiente del tiempo (en general es la *f.e.m* eficaz). Esta *f.e.m* dependerá de la frecuencia de vibración, de su amplitud de landlación, de la geometría de la muestra, de las posiciones de las bobinas y de la magnetización de la muestra [2].

En este artículo se calculará numéricamente la *f.e.m* para el caso en que la muestra magnética es un dipolo oscilando de manera armónica [3]. Primero obtendremos expresiones analíticas del flujo magnético a partir del formalismo de Bragg y luego expondremos la estrategia del cálculo numérico de la *f.e.m* inducida.

2 El Modelo

El sistema físico consiste en un dipolo oscilando de manera armónica, y cerca a este una espira circular. El dipolo tiene un momento magnético \vec{M} y se encuentra localizado en la posición \vec{b} , mientras que la espira circular de radio $\rho = a$ se encuentra localizada en la posición \vec{R} , tal como se muestra en la Figura 1.

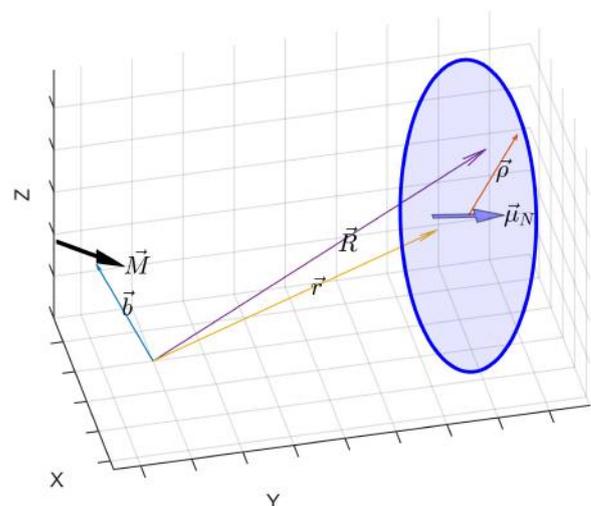


Figura 1. Sistema físico.

La ley de Faraday en unidades gaussianas viene planteada de la siguiente manera:

$$\varepsilon = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

Donde ε es la *f.e.m* inducida en la espira, Φ es el flujo magnético y c es la rapidez de la luz. Por definición del potencial vectorial magnético \vec{A} , el flujo magnético viene dado por:

$$\Phi = \int \int_D \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2)$$

Es sabido que el potencial magnético en un punto \vec{R} generado por un dipolo puntual de momentum magnético \vec{M} y localizado en la posición \vec{b} , está dado por [5]:

$$\vec{A} = \frac{\vec{M} \times (\vec{R} - \vec{b})}{|\vec{R} - \vec{b}|^3}; \Rightarrow \Phi = \oint_C \frac{\vec{M} \times (\vec{R} - \vec{b})}{|\vec{R} - \vec{b}|^3} \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

Parametrizando la curva sobre la cual se integrará y, haciendo los siguientes cambios de variables:

$$M = |\vec{M}| \quad (4)$$

$$m_i = M_i/M; \quad (i = x, y, z) \quad (5)$$

$$\alpha_i = m_z \quad (6)$$

$$\beta_i = b_i/a \quad (7)$$

$$\gamma_i = r_i/a \quad (8)$$

$$\delta_i = \beta_i - \gamma_i \quad (9)$$

$$\eta_i = 2\delta_i/(1 + \delta^2) \quad (10)$$

Se puede obtener el siguiente resultado:

$$\Phi = \frac{M}{a(1 + \delta^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{m_z - \alpha_x \cos \theta - \alpha_y \sin \theta}{[1 - \eta_x \cos \theta - \eta_y \sin \theta]^{3/2}} \quad (11)$$

Para calcular el flujo magnético se va proceder de dos formas distintas. La primera es expandir la fracción en una serie usando la expansión binomial de Newton e integrar los términos, la segunda es realizar un conjunto de cambios de variable y expresar el resultado final usando integrales elípticas. Se explorarán ambos métodos y se compararán los resultados obtenidos.

3 Cálculo analítico de la fuerza electromotriz

3.1 Solución en series

Para poder usar la expansión binomial de Newton sin ningún problema, se debe primero probar que el término x (en este caso $\eta_x \cos \theta + \eta_y \sin \theta$) es menor que uno.

La siguiente desigualdad trigonométrica es conocida:

$$\eta_x \cos \theta + \eta_y \sin \theta \leq \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (12)$$

Y por las definiciones de las variables, se cumple la siguiente igualdad:

$$\eta_x^2 + \eta_y^2 = \frac{4\delta_x^2}{(1 + \delta^2)^2} + \frac{4\delta_y^2}{(1 + \delta^2)^2} = \frac{4(\delta_x^2 + \delta_y^2)}{(1 + \delta^2)^2} \quad (13)$$

Basta con probar que el numerador es menor o igual que el denominador para obtener la acotación buscada, dado que ambos son positivos. Se parte de la siguiente desigualdad:

$$(1 - \delta^2)^2 \geq 0$$

$$1 - 2\delta^2 + \delta^4 \geq 0$$

$$1 + 2\delta^2 + \delta^4 \geq 4\delta^2 = 4(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2) \geq 4(\delta_x^2 + \delta_y^2) \quad (14)$$

En la última desigualdad es fácil identificar al primer término como el denominador y al segundo como el numerador, por lo que se ha conseguido probar la desigualdad.

Por lo tanto, usando la expansión binomial de Newton se obtiene:

$$\Phi = \frac{2\pi M}{a(1 + \delta^2)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4l + 1}{2^{6l}} \binom{4l}{2l} \binom{2l}{l} (\eta_x^2 + \eta_y^2)^l x \left(m_z - \frac{4l + 3}{4l + 4} (\eta_x \alpha_x + \eta_y \alpha_y) \right) \quad (15)$$

Se puede apreciar que la precisión de la solución se limita a la cantidad de términos que se consideren en la serie, además que se debe trabajar con coeficientes binomiales.

3.2 Solución en integrales elípticas

Si bien es cierto se ha encontrado en el ítem anterior una solución para el problema del flujo, la precisión de la aproximación está limitada por la cantidad de términos incluidos en la serie. Debido a esto, se buscará otra solución que no presente esta limitación.

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\theta = 2\psi + \Delta \quad (16)$$

Siendo:

$$\sin \Delta = -\frac{\eta_y}{(\eta_x^2 + \eta_y^2)^{1/2}} \quad (17)$$

$$\cos \Delta = -\frac{\eta_x}{(\eta_x^2 + \eta_y^2)^{1/2}} \quad (18)$$

Debido a las identidades trigonométricas, se usarán los siguientes términos para simplificar:

$$\kappa^2 = \frac{2(\eta_x^2 + \eta_y^2)^{1/2}}{1 + (\eta_x^2 + \eta_y^2)^{1/2}} \quad (19)$$

$$\mu = \frac{\alpha_x \delta_x + \alpha_y \delta_y}{\delta_\rho} \quad (20)$$

$$\delta_\rho = (\delta_x^2 + \delta_y^2)^{1/2} \quad (21)$$

Entonces:

$$\Phi = \frac{2M}{a(1 + \delta^2 + 2\delta_\rho)^{3/2}} \left((m_z - \mu) \int_{-\Delta/2}^{\pi - \Delta/2} \frac{d\psi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} + 2\mu \int_{-\Delta/2}^{\pi - \Delta/2} \frac{\cos^2 \psi d\psi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} \right)$$

Se tiene que:

$$\int \frac{d\psi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} = \int \frac{\cos^2 \psi d\psi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} + \int \frac{\sin^2 \psi d\psi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} \quad (22)$$

Las funciones dentro de las integrales tienen periodo π y son pares, por lo que:

$$\int_{-\Delta/2}^{\pi-\Delta/2} = 2 \int_0^{\pi/2} \quad (23)$$

Integrando por partes, y reconociendo las siguientes integrales elípticas:

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi}} \quad (24)$$

$$E(\kappa) = \int_0^{\pi/2} d\psi \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi} \quad (25)$$

Se obtiene el flujo magnético:

$$\Phi = AK(\kappa) + BE(\kappa) \quad (26)$$

Donde

$$A = \frac{4M}{a(1 + \delta^2 + 2\delta\rho)^{3/2}} \frac{2\mu}{\kappa^2} \quad (27)$$

$$B = \frac{4M}{a(1 + \delta^2 + 2\delta\rho)^{3/2}} \left(\frac{m_z - \mu}{1 - \kappa^2} - \frac{2\mu}{\kappa^2} \right) \quad (28)$$

De manera similar, es posible obtener el valor de la derivada del flujo como una combinación lineal de integrales elípticas.

Derivando las integrales elípticas:

$$\frac{dK}{d\kappa^2} = \frac{E - (1 - \kappa^2)K}{2\kappa^2(1 - \kappa^2)} \quad (29)$$

$$\frac{dE}{d\kappa^2} = \frac{E - K}{2\kappa^2} \quad (30)$$

Y de la regla de la cadena, se obtiene:

$$\frac{d\Phi}{dt} = A'K(\kappa) + B'E(\kappa) \quad (31)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} A' &= \frac{dA}{dt} - \frac{1}{2\kappa^2}(A + B) \frac{d\kappa^2}{dt} \\ &= -\frac{3[\dot{\delta}_\rho(1 + \delta_\rho) + \dot{\delta}_z \delta_z]A}{1 + \delta^2 + 2\delta\rho} + \frac{2M}{a(1 + \delta^2 + 2\delta\rho)^{3/2}} \left[\frac{4}{\kappa^2} \frac{d\mu}{dt} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1 - \kappa^2} \left(\frac{m_z - \mu}{\kappa^2} + \frac{4\mu(1 - \kappa^2)}{\kappa^4} \right) \frac{d\kappa^2}{dt} \right] \quad (32) \end{aligned}$$

De manera análoga:

$$\begin{aligned} B' &= -\frac{3[\dot{\delta}_\rho(1 + \delta_\rho) + \dot{\delta}_z \delta_z]B}{1 + \delta^2 + 2\delta\rho} + \frac{2M}{a(1 + \delta^2 + 2\delta\rho)^{3/2}} \\ &\quad \times \left\{ -2 \left(\frac{2 - \kappa^2}{\kappa^2(1 - \kappa^2)} \right) \frac{d\mu}{dt} + \frac{1}{1 - \kappa^2} \left[\left(\frac{m_z - \mu}{1 - \kappa^2} \right) \frac{1 + \kappa^2}{\kappa^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\mu \left(\frac{2 - \kappa^2}{\kappa^4} \right) \right] \frac{d\kappa^2}{dt} \right\} \quad (33) \end{aligned}$$

4 Estrategia del Cálculo Numérico de la FEM Inducida

En primer lugar consideremos a la espira como una circunferencia de radio $a = |\vec{\rho}|$, con centro en \vec{r} y vector normal unitario al plano que la contiene $\vec{\mu}_N$, tal como se muestra en la Figura 2.

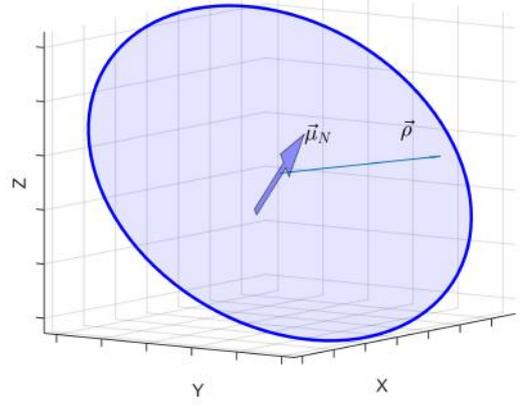


Figura 2. Espira circular

La circunferencia se divide en n_θ particiones cada una de longitud $dl = \rho d\theta$, con

$$d\theta = \frac{n_\theta}{2\pi} \quad (34)$$

Los puntos de la espira se generan por medio de la función $VSMEspira$ y se almacenan en la variable R de acuerdo a la expresión algorítmica

$$R \leftarrow VSMEspira(a, \vec{r}, \vec{\mu}_N, n_\theta) \quad (35)$$

Asimismo, la posición del dipolo se considera para cada punto de la trayectoria que describe el movimiento de su centro.

El intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$ se divide en n_t particiones cada una de longitud dt dada por

$$dt = \frac{t_f - t_0}{n_t} \quad (36)$$

El movimiento armónico del dipolo se asume de la forma:

$$\vec{b} = \vec{b}_0(\epsilon - \cos(\omega t)) \quad (37)$$

donde b_0 es la amplitud de oscilación, ϵ es un parámetro que permite fijar la posición inicial del dipolo y ω es la frecuencia angular de oscilación.

Para el cálculo del potencial vectorial magnético hacemos uso de la Ec. (3) a través del siguiente algoritmo:

ALGORITMO 1: dado t
for i from 1 to n_θ , **inc** 1 **do**
 calcular $\vec{A}(t) = \frac{\vec{M} \times (\vec{R} - \vec{b}(t))}{|\vec{R} - \vec{b}(t)|^3}$ para cada punto de la espira
end for

Para el cálculo del flujo magnético empleamos la Ec. (2) en el siguiente algoritmo:

ALGORITMO 2:

```

for  $k$  from 1 to  $n_{t+1}$ ,inc 1 do
    calcular  $\Phi(t_k) = \oint_C \vec{A}(t_k) \cdot d\vec{l}$  sobre la espira
end for
    
```

La integral de línea sobre la espira se determina con la fórmula de cuadratura abierta del punto medio.

El cálculo de la *f.e.m* inducida por medio de la Ec. (1) se realiza con el algoritmo:

ALGORITMO 3:

```

for  $k$  from 1 to  $n_t + 1$ ,inc 1 do
    calcular  $\varepsilon(t_k) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} |_{t=t_k}$  sobre la espira
end for
    
```

La derivada se calcula en la aproximación de diferencias finitas centrales de tres puntos.

5 Resultados

La estrategia numérica lo implementamos en el lenguaje de programación C. A continuación presentamos los resultados obtenidos considerando 2 configuraciones de espira presentadas en el trabajo de Bragg [3].

Sistema 1: Este sistema consiste de 2 bobinas de radio $a = 0.5 \text{ in}$ paralelos al plano XY , ubicados en las posiciones $z = 5/16 \text{ in}$ y $-5/16 \text{ in}$, conectadas en serie, tal como se muestra en la Figura 3. El dipolo vibra a lo largo del eje Y desde $b_y = 0$ hasta $b_y = 1 \text{ in}$ con $M = M_z$. La frecuencia inicial de vibración es de $\omega = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$.

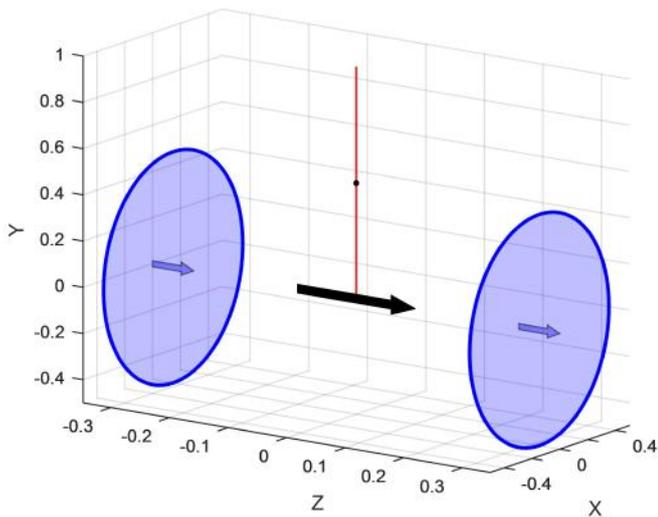


Figura 3. Sistema 1.

En la figura 4 se grafica la dependencia del flujo magnético con la posición de la espira, calculada vía series usando 10 términos, y vía integrales elípticas. Se puede apreciar que al aumentar el número de términos en la serie, el resultado es indistinguible con lo obtenido utilizando integrales elípticas. Además se observa que el flujo magnético disminuye a medida que se incrementa la amplitud de oscilación del dipolo. Esto es esperable, pues al aumentar la amplitud de oscilación por encima

del radio de la espira, menos líneas de campo magnético atravesarán la espira y eso llevará a la disminución del flujo.

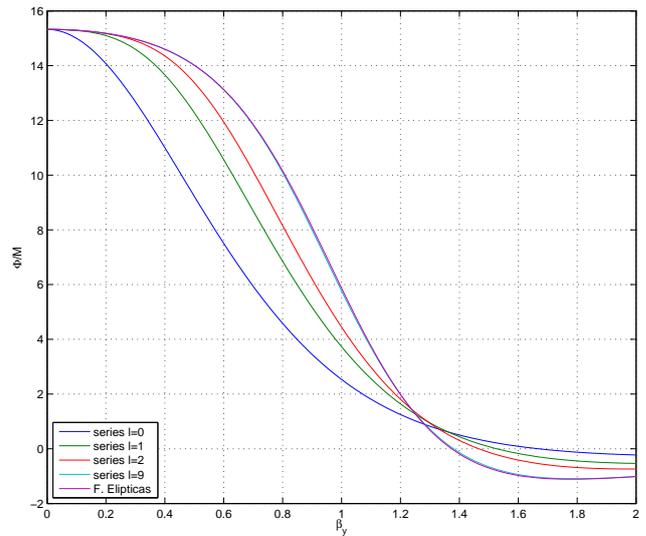


Figura 4. Φ/M vs β_y en la aproximación por series e integrales elípticas para el sistema 1

Dada la simetría del movimiento en medio período, solo es necesario graficar la fuerza electromotriz durante la mitad de éste, tal como se muestra en la figura 5.

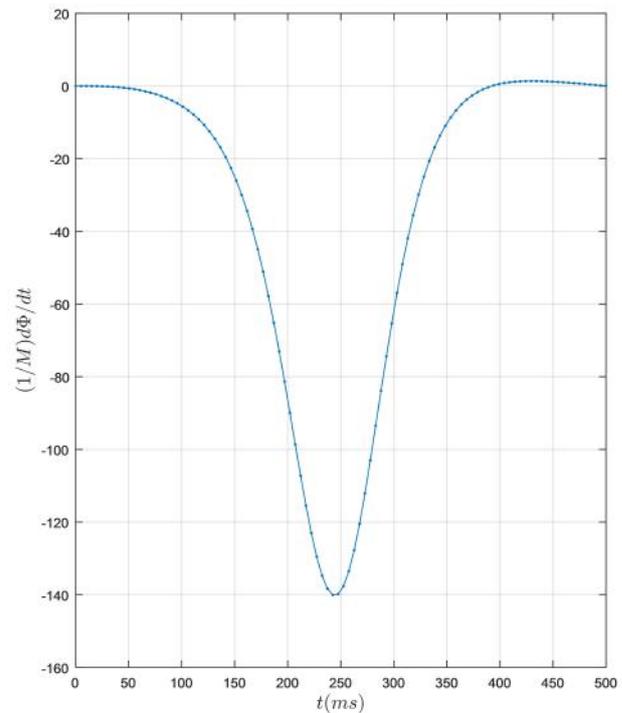


Figura 5. *f.e.m* en función del tiempo

Si se mide la *f.e.m* máxima haciendo variar la amplitud de oscilación, también se observa una relación creciente, tal como se observa en la figura 6. Esto muestra que si

se aumenta la amplitud de oscilación, la frecuencia debe aumentar para poder hacer en el mismo tiempo dicha oscilación

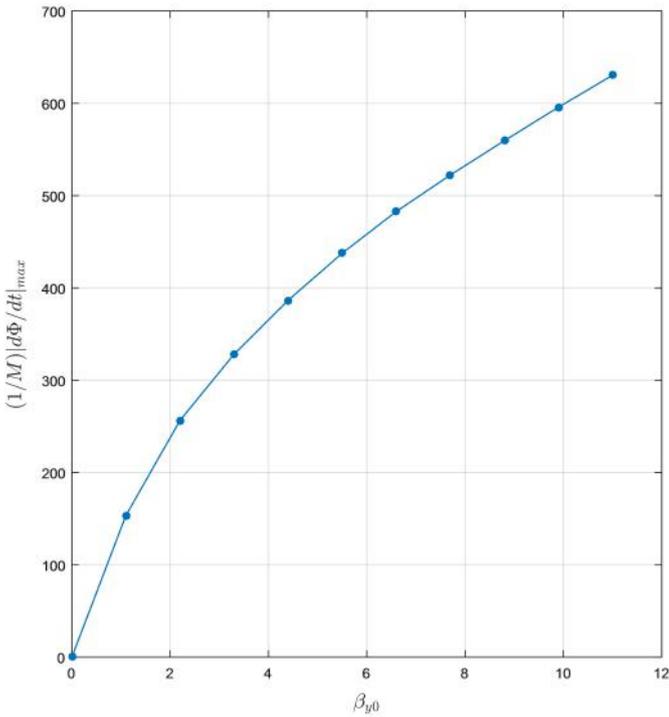


Figura 6. f.e.m máxima vs. amplitud de oscilación β_{y0}

En la Figura 7 se grafica el máximo de la f.e.m en función del desplazamiento de la posición de equilibrio del dipolo. Se observa que al momento de desplazar la posición de equilibrio de la oscilación, el cambio en la fuerza electromotriz es mínimo cuando este desplazamiento es paralelo a la espira, pero al desplazarlo en dirección perpendicular a la espira el cambio es considerable.

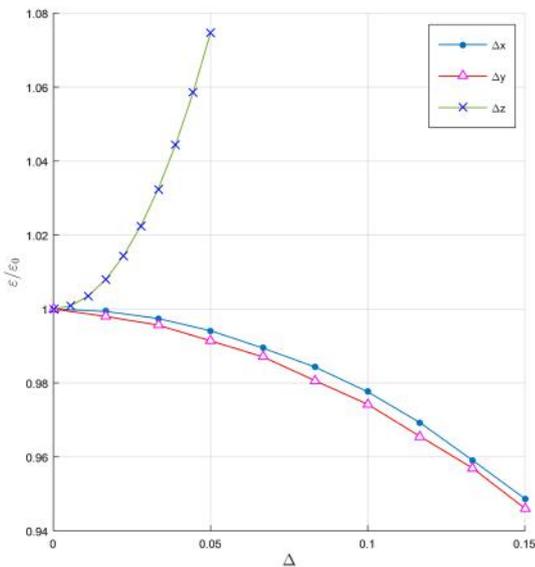


Figura 7. f.e.m inducida normalizada en función del desplazamiento del dipolo para el sistema 1

Sistema 2: Este sistema consiste de cuatro espiras localizadas en las posiciones $(0.5, 0, 0), (0.5, 0, h), (-0.5, 0, 0), (-0.5, 0, h)$ con $h = 0.1 \times a$, teniendo un radio de 0.3215. Se asume que la muestra oscila a lo largo del eje Z alrededor del centro geométrico del sistema con una frecuencia de 100Hz y una amplitud de 0.001875 in. La magnetización de la muestra apunta en la dirección positiva del eje X, tal como se muestra en la Figura 8.

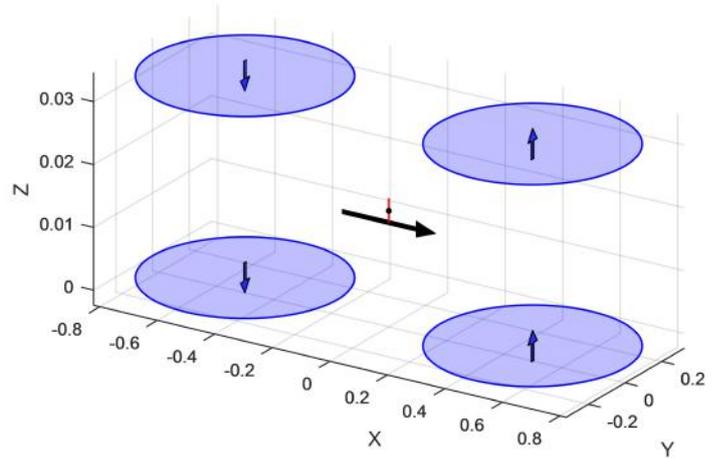


Figura 8. Sistema 2

En la Figura 9 se grafica el máximo valor del módulo de la f.e.m inducida en función de la frecuencia de oscilación f_z desde 0 Hz hasta 100 Hz. Como se esperaba, la f.e.m resulta ser directamente proporcional a la frecuencia.

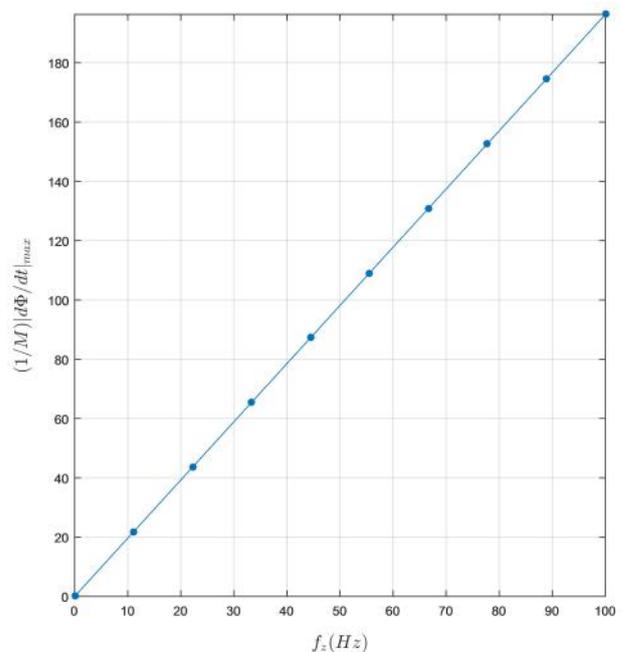


Figura 9. f.e.m máxima inducida versus la frecuencia de vibración f_z para el sistema 2

En la Figura 10 se grafica el pico de la f.e.m in-

ducida versus la amplitud de oscilación del dipolo. Como la frecuencia de oscilación es la misma para todos los puntos, mientras mayor sea la amplitud mayor será la rapidez del dipolo a lo largo de su trayectoria. Esto implica que al aumentar la amplitud de oscilación mayor será la *f.e.m* inducida.

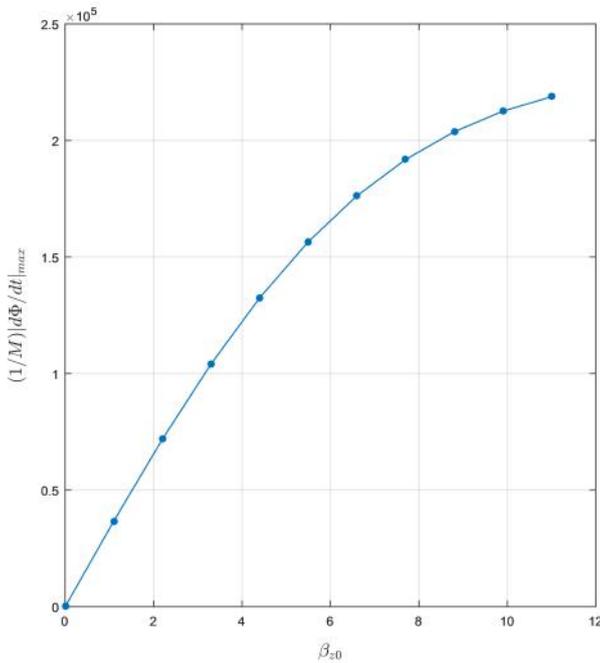


Figura 10. *f.e.m* máxima inducida como función de la amplitud máxima de oscilación para el sistema 2

Finalmente, se calcula el efecto del desplazamiento del centro del dipolo con respecto a la *f.e.m* inducida normalizada. La Figura 11 muestra el efecto de los desplazamientos independientes a lo largo de los ejes coordenados. Se observa que el efecto más importante ocurre para los desplazamientos a lo largo de los ejes *X* y *Z*, teniendo que para un desplazamiento de 0.02 produce un cambio aproximado del 4% en la salida. Los desplazamientos a lo largo del eje *Y* tienen un efecto mucho menor.

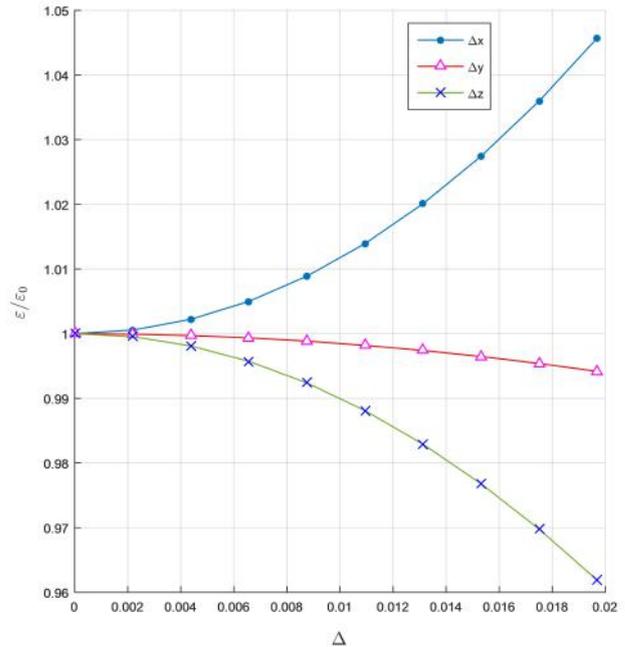


Figura 11. *f.e.m* inducida normalizada respecto de su valor cuando el dipolo está en su posición inicial, como función del desplazamiento del centro del dipolo para el sistema 2

6 Conclusiones

Si bien es cierto existen estudios de la influencia de la geometría del material en la *f.e.m* detectada [4], pero al considerar una muestra puntual (dipolo magnético) obtenemos resultados bastante aproximados a los resultados experimentales, cuando las dimensiones de la muestra son bastante pequeñas en comparación a la de las bobinas[3].

Oscilaciones pequeñas de la muestra conducen a que la *f.e.m* inducida sea, en buena aproximación, sinusoidal. Esto permite conocer directamente la *f.e.m* eficaz a partir de la predicción teórica (en este caso $V_{eff} = V_{max}/\sqrt{2}$).

Obteniendo las regiones donde la *f.e.m* varía menos al desplazar la posición de equilibrio de la muestra, nos permite optimizar el lugar de donde se debe colocar la muestra. De este modo, se puede calibrar el equipo experimental con una muestra con magnetización conocida y reducir la incertidumbre debido a los pequeños cambios de la posición de equilibrio de la muestra.

1. Stephen Blundell, Magnetism in Condensed Matter Cap. 2, 5; Oxford University Press, 2003
2. Luis Avilés, Abel Gutarra, Caracterización y estudio de materiales magnéticos; Editorial Académica Española, 2012
3. Bragg E. E., Seehra M. S. *J. Phys. E: Sci. Instrum.* **9**,

216 (1976).

4. Xu X., Sun A., Jin X., Hongchang F. Yao X. *Rev. Sci. Instrum.* Vol **67** No. **11** 3914 (1997).
5. Milford F., Reitz J., Christy R., Fundamentos de la Teoría Electromagnética. Tercera Edición. Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.