

Elevación de grado de las curvas B-spline y el corte de esquinas

Johnny Valverde Montoro[‡]
Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional de Ingeniería;
[‡]jvalverde@uni.edu.pe

Recibido el 10 de Marzo del 2013; aceptado el 15 de Marzo del 2013

El presente trabajo muestra que el método de elevación de grado de las curvas B-spline se puede interpretar como el proceso de corte de esquina. Se muestra el significado geométrico de los puntos de control auxiliares durante el proceso del corte de esquina. La idea principal es elevar gradualmente el grado de las curvas B-spline intervalo por intervalo. A partir de las funciones B-spline se plantea una nueva clase de funciones de base.

1. Introducción

Muchos algoritmos utilizados en el diseño geométrico asistido por computadora (CAGD) se pueden interpretar como procesos de corte de esquinas (ver ([2, 5]). Esta técnica es interesante ya que ofrece construcciones geométricas simples de curvas (ver [5]). Además, los puntos de control auxiliares durante el proceso tienen un significado geométrico específico, por ejemplo, la subdivisión de las curvas de Bézier. Se conocen varios algoritmos relacionados a la elevación de grado de las curvas de Bézier (ver [1]) y curvas B-spline (ver [6, 4]), sin embargo ninguno de ellos puede ser interpretado como un corte de esquina.

En el presente trabajo se interpretará la elevación de grado de una curva B-spline como un corte de esquina y los puntos de control auxiliares obtenidos tienen un significado geométrico.

La elevación de grado consiste en que las curvas de B-spline, que están expresadas con respecto a las de funciones de base B-spline de grado k , también pueden ser representadas por funciones de base B-spline de grado $k + 1$ (ver [3, 7], pero todas estas fórmulas son complejas y difíciles de interpretar como un proceso de corte de esquina.

Comparando las identidades para los grados de elevación de funciones de base de Bernstein con funciones de base B-spline, se encontró que una función de base de Bernstein de grado n puede ser representada por no más de dos funciones de base de grado $n + 1$, pero por lo general una función de base B-spline de grado k es representada por más de dos funciones de base B-spline de grado $k + 1$. Esta es la razón por qué la elevación de grado de las curvas de Bézier es un corte de esquina y porque las curvas B-spline son difíciles de interpretar como corte de esquina. Un análisis más detallado muestra que la complejidad de las fórmulas del grado de elevación de las funciones de base B-spline se atribuye al hecho de que la multiplicidad de nodos interiores se incrementan simultáneamente. Así que para obtener fórmulas de elevación grado, más simple, de funciones de base B-spline, se adopta un nuevo método que en cada paso sólo aumenta la multiplicidad

de un nodo y eleva el grado sólo en este intervalo de nodo. Por este método, las funciones de base previas pueden ser representadas por no más de dos funciones de base nuevas, por lo tanto, al igual que el grado de elevación de las curvas de Bézier, la elevación del grado de curvas B-spline se puede interpretar como un corte de esquina. Para elevar el grado de curvas B-spline sólo en un intervalo de nodo por paso, se debe manejar una nueva clase de funciones de base: funciones de base B-spline grado doble cuyo grado en algunos intervalos es mayor que en otros intervalos. Pero es difícil construir funciones de base B-spline de grado doble que utilizan las definiciones tradicionales de B-spline, como las diferencias divididas de funciones de potencia truncadas. Para esto se definen los B-spline como una integral iterativa con diferentes funciones de base iniciales (ver [8]). de esta manera se pueden definir varias funciones de base spline mediante la selección de diversas funciones de base iniciales, por lo que llamamos a esta definición de spline como la definición integral de spline. En este artículo se definen las funciones de base B-spline grado doble a través de la selección de funciones de base grado doble iniciales. En la Sección 2, se muestran algunas fórmulas de elevación de grado de los B-spline. En la Sección 3, se construyen las funciones de base B-spline grado doble, mediante la definición de un B-spline en forma de una integral. Como resultado de estas construcciones, en la Sección 4, se demuestra que la elevación de grado de una curva B-spline se puede interpretar como un corte de esquina.

2. Curvas B-spline y la elevación de grado

Una curva B-spline de grado k es una curva polinomial por partes definida como sigue:

$$\mathbf{B}(u) = \sum_{i=0}^m N_{i,k}(u) \mathbf{B}_i, \quad (1)$$

donde \mathbf{B}_i , con $i = 0, 1, \dots, m$, son puntos de control, y $N_{i,k}(u)$, con $i = 0, 1, \dots, m$, son funciones de base

B-spline definidas sobre un vector nodo no decreciente $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{m+k+1}\}$. Los vectores nodo pueden ser clasificados como anclados o no anclados. Puesto que pueden transformarse entre sí (ver [6]), a lo largo de este documento se supone que el vector nodo esta anclado (presentan multiplicidad mayor que uno en los extremos), y se reescribe U , como

$$T = \underbrace{\{t_1, \dots, t_1\}}_{z_1}, \dots, \underbrace{\{t_n, \dots, t_n\}}_{z_n},$$

donde z_1, \dots, z_n denota las multiplicidades de los nodos interiores y $z_1 = z_n = k + 1$.

Para elevar el grado de $\mathbf{P}(t)$ a $k+1$, podríamos buscar puntos de control $\hat{\mathbf{B}}$ y un vector nodo \hat{T} tal que

$$\mathbf{B}(t) = \hat{\mathbf{B}}(t) = \sum_{i=0}^{\hat{m}} \hat{N}_{i,k+1}(t) \hat{\mathbf{B}}_i. \quad (2)$$

Las curvas $\mathbf{B}(t)$ y $\hat{\mathbf{B}}(t)$ son las mismas geoméricamente y paraméricamente. Debido a que la continuidad de $\mathbf{B}(t)$ y $\hat{\mathbf{B}}(t)$, en el nodo, es la misma, \hat{T} debe tomar la forma

$$\hat{T} = \underbrace{\{t_1, \dots, t_1\}}_{z_1+1}, \dots, \underbrace{\{t_n, \dots, t_n\}}_{z_n+1}.$$

Luego, el principal trabajo de la elevación de grado es calcular $\hat{\mathbf{B}}_i$. Evidentemente, el cálculo de $\hat{\mathbf{B}}_i$ requiere fórmulas de transformación entre las funciones de bases B-spline de grado k y $k + 1$.

Debido a la propiedad de soporte local de las funciones de base B-spline (ver [6]), se tiene que cada uno de los $\{N_{i,k}(t)\}$ se representa usualmente por más de dos funciones de base B-spline de grado $k + 1$ en $\{\hat{N}_{i,k+1}(t)\}$. Esto complica el cálculo de $\hat{\mathbf{P}}_i$ y hace que el grado de elevación de curvas B-spline sea difícil de comprender.

Basados en los enfoques tradicionales, en cada paso sólo se incrementa la multiplicidad de un nodo interior y eleva el grado de $\mathbf{B}(t)$ sólo en un intervalo de nodos. Sea

$$T^j = \underbrace{\{t_1, \dots, t_1\}}_{z_1+1}, \dots, \underbrace{\{t_j, \dots, t_j\}}_{z_j+1}, \underbrace{\{t_{j+1}, \dots, t_{j+1}\}}_{z_{j+1}}, \dots, \underbrace{\{t_n, \dots, t_n\}}_{z_n}$$

Sobre T^j se define las funciones de base B-spline grado doble $\{N_{i,k}^j(t)\}$ cuyo grado es $k + 1$ en $[t_j, t_{j+1}]$ y es de grado k en $[t_{j+1}, t_n]$. Basado en $\{N_{i,k}^j(t)\}$ se define la curva B-spline grado doble $\mathbf{B}^j(t)$ sobre T^j . Si observa que $T^j = T^{j-1} + \{t_j\}$, esto es, sólo se inserta un nodo en T^{j-1} , cada uno de $\{N_{i,k}^{j-1}(t)\}$ puede ser representado por no más de dos funciones de base en $\{N_{i,k}^j(t)\}$. Luego, los puntos de control de $\mathbf{B}^j(t)$ se pueden obtener a partir de los puntos de control $\mathbf{B}^{j-1}(t)$ mediante cortes de esquina. Repitiendo este proceso se puede elevar el grado de la curva $\mathbf{B}(t)$ en todos los intervalos de nodos mediante cortes de esquina.

3. Las funciones de base B-spline grado doble

En esta sección se presenta la construcción sistemática de las funciones de base B-spline grado doble

(bigrado). En primer lugar, se definen las funciones de base B-spline grado doble y se ilustran sus relaciones correspondientes a las funciones de base B-spline usuales. Así, se deducen las fórmulas de transformación de funciones bases B-spline grado doble y se muestran algunas de sus propiedades.

3.1. Definición de las funciones de base B-spline grado doble

Primero, definimos un conjunto inicial de funciones sobre

$$\begin{aligned} T^j &= \underbrace{\{t_1, \dots, t_1\}}_{z_1+1}, \dots, \underbrace{\{t_j, \dots, t_j\}}_{z_j+1}, \underbrace{\{t_{j+1}, \dots, t_{j+1}\}}_{z_{j+1}}, \dots, \underbrace{\{t_n, \dots, t_n\}}_{z_n} \\ &= \{t_0^j, t_1^j, \dots, t_{m_j}^j\}, \end{aligned}$$

$$(m_j = z_1 + \dots + z_n + j - 1):$$

$$N_{i,0}^j(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i^j}{t_{i+1}^j-t_i^j} & \text{si } t_i^j \leq t < t_{i+1}^j \text{ y } 0 \leq i \leq l_j \\ \frac{t_{i+1}^j-t}{t_{i+2}^j-t_{i+1}^j} & \text{si } t_{i+1}^j \leq t < t_{i+2}^j \text{ y } 0 \leq i \leq l_j - 1 \\ 1 & \text{si } t_i^j \leq t < t_{i+1}^j \text{ y } i > l_j \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3)$$

donde $l_j = z_1 + z_2 + \dots + z_j + j - 1$.

Luego, para $k \geq 1$, $N_{i,k}^j(t)$ se define recursivamente mediante

$$N_{i,k}^j(t) = \int_{-\infty}^t \left[\frac{N_{i,k-1}^j(s)}{\sigma_{i,k-1}^j} - \frac{N_{i+1,k-1}^j(s)}{\sigma_{i+1,k-1}^j} \right] ds, \quad (4)$$

donde $i = 0, 1, \dots, m_j - k - 1$ y

$$\sigma_{i,k}^j = \int_{-\infty}^{\infty} N_{i,k}^j(t) dt. \quad (5)$$

Si $N_{i,k}^j(t) = 0$, se define

$$\int_{-\infty}^t \frac{N_{i,k}^j(t) dt}{\sigma_{i,k}^j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \begin{aligned} &t \geq t_{i+k+2}^j \quad (i \leq l_j - k - 1) \\ &\text{o } t \geq t_{i+k+1}^j \quad (i > l_j - k - 1) \end{aligned} \\ 0 & \text{si } \begin{aligned} &t < t_{i+k+2}^j \quad (i \leq l_j - k - 1) \\ &\text{o } t < t_{i+k+1}^j \quad (i > l_j - k - 1) \end{aligned} \end{cases} \quad (6)$$

Observación 1. Debido a que la multiplicidad de t_i^j ($i \leq l_j$) es no menor que 2, el intervalo de nodo no nulo de $N_{i,0}^j(t)$ es no mayor que 1.

Observación 2. Ya que t_n es el último nodo, T^{n-1} tomaría la forma

$$\hat{T} = \underbrace{\{t_1, \dots, t_1\}}_{z_1+1}, \dots, \underbrace{\{t_n, \dots, t_n\}}_{z_n+1}.$$

En virtud de la definición se tiene que $N_{i,k}^j(t)$ ($j = 1, \dots, n - 2$) son funciones de base B-spline grado doble: el grado es $k + 1$ en $[t_j, t_{j+1}]$ y es k en $(t_{j+1}, t_n]$. Como $\{N_{i,k}^0(t)\}$ y $\{N_{i,k}^{n-1}(t)\}$ son polinomios de grado k y $k + 1$ respectivamente.

Teorema 1. Sean $\{N_{i,k}(t)\}$, $\widehat{N}_{i,k+1}(t)$ las funciones de base B-spline usuales definidas sobre los vectores de nodo

$$T = \underbrace{\{t_1, \dots, t_1\}}_{z_1}, \dots, \underbrace{\{t_n, \dots, t_n\}}_{z_n}$$

$$\widehat{T} = \underbrace{\{t_1, \dots, t_1\}}_{z_1+1}, \dots, \underbrace{\{t_n, \dots, t_n\}}_{z_n+1}$$

y $\{N_{i,k}^0(t)\}$, $\{N_{i,k}^{n-1}(t)\}$ son funciones de base B-spline grado doble definidas sobre $T^0 = T$, $T^{n-1} = \widehat{T}$ en virtud de las ecuaciones (3)-(6). Luego, $N_{i,k}(t) = N_{i,k}^0(t)$ y $\widehat{N}_{i,k+1}(t) = N_{i,k}^{n-1}(t)$.

Demostración. Primero, se probará que $N_{i,k}(t) = N_{i,k}^0(t)$, por inducción sobre k . Cuando $k = 0$, el teorema se cumple de modo obvio. Asumamos que $N_{i,k}(t) = N_{i,k}^0(t)$, para $k \geq 0$. Si $t < t_i$, es fácil ver que $N_{i,k+1}(t) = N_{i,k+1}^0(t) = 0$, para $t \geq t_i$, notando que

$$\int_{-\infty}^t N_{i,k}(s) ds = \begin{cases} \sum_{h=1}^n \frac{t_{i+k+1}-t_i}{k+1} N_{h,k+1}(t) & t_i \leq t < t_{i+k+1} \\ \frac{t_{i+k+1}-t_i}{k+1} & t \geq t_{i+k+1} \end{cases} \quad (7)$$

y, por la hipótesis inicial, se tiene que $\sigma_{i,k}^0 = \sigma_{i,k}$, $N_{i,k}^0(t) = N_{i,k}(t)$, entonces

$$\begin{aligned} N_{i,k+1}^0 &= \int_{-\infty}^t \left[\frac{N_{i,k}^0(s)}{\sigma_{i,k}^0} - \frac{N_{i+1,k}^0(s)}{\sigma_{i+1,k}^0} \right] ds \\ &= \int_{-\infty}^t \left[\frac{N_{i,k}(s)}{\sigma_{i,k}} - \frac{N_{i+1,k}(s)}{\sigma_{i+1,k}} \right] ds = N_{i,k+1}(t). \end{aligned}$$

Para $\{\widehat{N}_{i,k+1}(t)\}$ y $\{N_{i,k}^{n-1}(t)\}$, se nota que $N_{i,0}^{n-1}(t) = \widehat{N}_{i,1}(t)$ sobre \widehat{T} , a partir del resultado se prueba que $N_{i,k}^{n-1}(t) = \widehat{N}_{i,k+1}(t)$. \square

También a $\{N_{i,k}^0(t)\}$, $\{N_{i,k}^{n-1}(t)\}$ se les llamará funciones de base B-spline grado doble.

3.2. Fórmulas de transformación de funciones de base B-spline grado doble

Se deducirán las fórmulas de transformación de las funciones de base B-spline grado doble $\{N_{i,k}^{j-1}(t)\}$ y $\{N_{i,k}^j(t)\}$. Debido a estas fórmulas, se pueden obtener las de transformación de los puntos de control de las curvas B-spline $B^{j-1}(t)$ y $B^j(t)$.

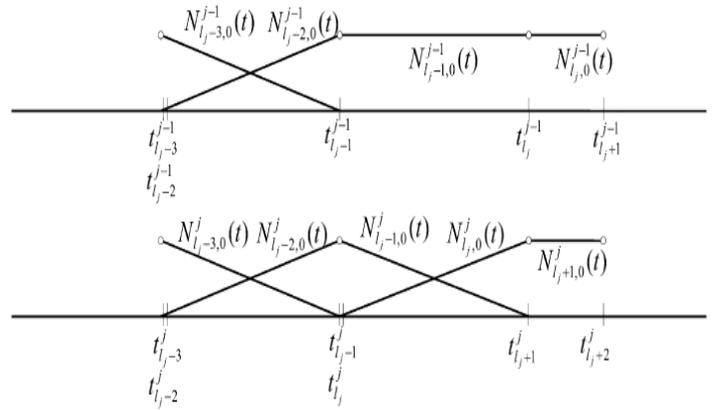


Figura 1. Las funciones de base iniciales $\{N_{i,0}^{j-1}(t)\}$ y $\{N_{i,0}^j(t)\}$

Señalando que $T^j = T^{j-1} - \{t_j\}$ y a partir de las definiciones de $\{N_{i,0}^{j-1}(t)\}$ y $\{N_{i,0}^j(t)\}$ se obtiene (ver Fig. 1)

$$N_{i,0}^{j-1} = \begin{cases} N_{i,0}^j(t) & i < t_j - 1 \\ N_{i,0}^j(t) - N_{i+1,0}^j(t) & i = t_j - 1 \\ N_{i+1,0}^j(t) & i > t_j - 1 \end{cases} \quad (8)$$

Empezando desde la (8), se puede obtener la fórmula de transformación de $\{N_{i,k}^{j-1}(t)\}$ y $\{N_{i,k}^j(t)\}$, con $k \geq 1$:

Teorema 2. Para las funciones de base B-spline grado doble $\{N_{i,k}^{j-1}(t)\}$ y $\{N_{i,k}^j(t)\}$ definidos sobre T^{j-1} , T^j mediante (3)-(6), tenemos

$$N_{i,k}^{j-1} = \begin{cases} N_{i,k}^j(t) & i < t_j - k - 1 \\ (1 - a_{i,k}^j)N_{i,k}^j(t) + a_{i+1,k}^j N_{i+1,k}^j(t) & t_j - k - 1 \leq i \leq t_j - 1 \\ N_{i+1,k}^j(t) & i > t_j - 1 \end{cases} \quad (9)$$

donde $\sigma_{i,k}^j$ es definido mediante (5), y $a_{i,k}^j$ es definido como sigue:

$$a_{i,j-h-1,h}^j = 0, \quad a_{i,j,h}^j = 1 \quad (h = 0, 1, \dots, k-1) \quad (10)$$

$$a_{i,h+1}^j = a_{i+1,h}^j \frac{\sigma_{i+1,h}^j}{\sigma_{i,h}^{j-1}} \quad (0 \leq h \leq k-1, t_j - h - 1 \leq i \leq t_j - 1). \quad (11)$$

Demostración. El Teorema 2 se prueba por inducción sobre k . Cuando $k = 0$, esto es obvio. Asumamos que el teorema se cumple para $k \geq 0$, luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N_{i,k}^{j-1}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [(1 - a_{i,k}^j)N_{i,k}^j(t) + a_{i+1,k}^j N_{i+1,k}^j(t)] dt \quad (12)$$

para $t_j - k - 1 \leq i \leq t_j - 1$, de modo que

$$\sigma_{i,k}^{j-1} = (1 - a_{i,k}^j)\sigma_{i,k}^j + a_{i+1,k}^j \sigma_{i+1,k}^k. \quad (13)$$

Al combinar las definiciones de $\{N_{i,k+1}^{j-1}(t)\}$ y $\{N_{i,k+1}^j(t)\}$

se obtiene

$$\begin{aligned}
N_{i,k+1}^{j-1}(t) &= \int_{-\infty}^t \left[\frac{N_{i,k}^{j-1}(s)}{\sigma_{i,k}^{j-1}} - \frac{N_{i+1,k}^{j-1}(s)}{\sigma_{i+1,k}^{j-1}} \right] ds \\
&= \int_{-\infty}^t \frac{(1 - a_{i,k}^j) N_{i,k}^j(s) + a_{i+1,k}^j N_{i+1,k}^j(s)}{(1 - a_{i,k}^j) \sigma_{i,k}^j + a_{i+1,k}^j \sigma_{i+1,k}^j} ds \\
&\quad - \int_{-\infty}^t \frac{(1 - a_{i+1,k}^j) N_{i+1,k}^j(s) + a_{i+2,k}^j N_{i+2,k}^j(s)}{(1 - a_{i+1,k}^j) \sigma_{i+1,k}^j + a_{i+2,k}^j \sigma_{i+2,k}^j} ds \\
&= \frac{(1 - a_{i,k}^j) \sigma_{i,k}^j}{(1 - a_{i,k}^j) \sigma_{i,k}^j + a_{i+1,k}^j \sigma_{i+1,k}^j} \int_{-\infty}^t \left[\frac{N_{i,k}^j(s)}{\sigma_{i,k}^j} - \frac{N_{i+1,k}^j(s)}{\sigma_{i+1,k}^j} \right] ds \\
&\quad + \frac{a_{i+2,k}^j \sigma_{i+2,k}^j}{(1 - a_{i+1,k}^j) \sigma_{i+1,k}^j + a_{i+2,k}^j \sigma_{i+2,k}^j} \int_{-\infty}^t \left[\frac{N_{i+1,k}^j(s)}{\sigma_{i+1,k}^j} - \frac{N_{i+2,k}^j(s)}{\sigma_{i+2,k}^j} \right] ds \\
&= \left(1 - a_{i+1,k}^j \frac{\sigma_{i+1,k}^j}{\sigma_{i,k}^{j-1}} \right) N_{i,k+1}^j(t) + a_{i+2,k}^j \frac{\sigma_{i+2,k}^j}{\sigma_{i+1,k}^{j-1}} N_{i+1,k+1}^j(t)
\end{aligned}$$

Esto significa que

$$a_{i,k+1}^j = a_{i+1,k}^j \frac{\sigma_{i+1,k}^j}{\sigma_{i,k}^{j-1}}. \quad (14)$$

En virtud de la hipótesis y (14) se concluye que el teorema se cumple para $k+1$. Con lo cual, se completa la prueba. \square

Observación 3. Para calcular $a_{i,k}^j$, se debe conocer que $\sigma_{i,h}^{j-1}$ ($h = 0, 1, \dots, k-1$) y $\sigma_{i,h}^j$ ($h = 0, 1, \dots, k-1$). Sin embargo, es muy complicado calcular $\sigma_{i,h}^{j-1}$ ($h = 0, 1, \dots, k-1$) y $\sigma_{i,h}^j$ ($h = 0, 1, \dots, k-1$) a partir de las definiciones. A partir de (7), (13) y (14) se tiene un enfoque iterativo para calcular $\sigma_{i,h}^j$ ($h = 0, 1, \dots, k-1$) y $a_{i,h}^j$ ($h = 1, \dots, k-1$). Por ejemplo, para calcular $\sigma_{i,h}^0$, $\sigma_{i,h}^1$, $a_{i,h}^1$, debido a (7), se sabe que $\sigma_{i,0}^0 = t_{i+1}^0 - t_i^0$ y $\sigma_{i,-1,0}^1 = (t_{i+1}^1 - t_{i-1}^1)/2$ desde que $N_{i-1,0}^j(t) = \widehat{N}_{i-1,1}(t)$ el cual es la función de base B-spline de usual de grado uno definida sobre \widehat{T} . Luego, obtenemos $\sigma_{i,1}^1$ sustituyendo $\sigma_{i,-1,0}^0$, $\sigma_{i,-1,0}^1$ y (10) en (13). Después, obtenido $\sigma_{i,1}^1$; combinando con $\sigma_{i,1}^0 = (t_{i+2}^1 - t_i^1)/2$ y $\sigma_{i,-2,2}^1 = (t_{i+1}^1 - t_{i-2}^1)/3$, se obtiene $\sigma_{i,1}^1$, $a_{i,2}^1$ y así sucesivamente.

3.3. Propiedades de las funciones de base B-spline grado doble

En esta subsección se prueban algunas propiedades de las funciones de base B-spline grado doble $\{N_{i,k}^j(t)\}$ por inducción inversa sobre j . Cuando $j = n-1$, $\{N_{i,k}^j(t)\}$ son las funciones de base B-spline de grado $k+1$ usuales, de hecho, ellas satisfacen estas propiedades.

Las propiedades que son usadas para definir las curvas B-splines grado doble son:

1. *Positividad:* $N_{i,k}^j(t) > 0$, para $t \in (t_i^j, t_{i+k+1}^j)$ ($i > l_j - k - 1$ y $i > l_j - k - 1$) o $t \in (t_i^j, t_{i+k+2}^j)$ ($i \leq l_j - k - 1$ y $t_{i+k+2}^j > t_i^j$).

Demostración. Se asume que esta propiedad se cumple para $j \neq n-1$. Cuando i, t satisfacen

las condiciones de la esta propiedad, debido a (5), $\sigma_{i,k}^j > 0$. En virtud de (11), $a_{i,k}^j > 0$. Finalmente, de (9), se tiene que $N_{i,k}^{j-1}(t) > 0$. \square

2. *Partición de la unidad:* $\sum_i N_{i,k}^j(t) = 1$.

Demostración. Se asume que esta propiedad se cumple para $j \leq n-1$. Luego, $\sum_i N_{i,k}^j(t) = 1$. Debido a (9), $\sum_i N_{i,k}^{j-1}(t) = \sum_i N_{i,k}^j(t) = 1$. \square

3. *Independencia lineal global:* $\{N_{i,k}^j(t)\}$ son linealmente independiente sobre T^j si no existe funciones nulas en $\{N_{i,k}^j(t)\}$.

Demostración. Se asume que esta propiedad se cumple para $j \leq n-1$. Suponer que

$$\varphi(t) = \sum_{l=1}^h \alpha_l N_{i,k}^{j-1}(t) \equiv 0, \quad (15)$$

para todo $t \in [t_1, t_n]$. Sustituyendo la (9) en (15) y se obtiene

$$\varphi(t) = \sum_{l=1}^h \alpha_l \left[(1 - a_{i,k}^j) N_{i,k}^j(t) + a_{i+1,k}^j N_{i+1,k}^j(t) \right] \equiv 0$$

Por hipótesis, se tiene que $\alpha_1(1 - a_{i,k}^j) = \alpha_1 a_{i+1,k}^j + \alpha_2(1 - a_{i+1,k}^j) = \dots = \alpha_h a_{h+1,k}^j = 0$. Debido a que no existe funciones nulas en $\{N_{i,k}^j(t)\}$, $\alpha_j = 0$, ($l = 1, \dots, h$). \square

4. La elevación de grado de las curvas B-spline interpretado como un corte de esquina

Empleando las funciones de base grado doble se probará que el método de la elevación de grado de una curva B-spline es un corte de esquina y se mostrara el significado geométrico de los puntos de control auxiliares.

En primer lugar, se definen las curvas B-spline grado doble, las cuales actúan como los puentes de $\mathbf{P}(t)$ y $\widehat{\mathbf{P}}(t)$ definidos en (1) y (2), respectivamente:

Una curva B-spline grado doble definido sobre el vector nodo T^j es

$$\mathbf{P}^j(t) = \sum_{i=0}^{m_j-k-1} N_{i,k}^j(t) \mathbf{P}_i^j \quad (t_1 \leq t \leq t_n), \quad (16)$$

donde \mathbf{P}_i^j es un punto de control y $N_{i,k}^j(t)$ es una función de base B-spline grado doble definida sobre el vector nodo T^j mediante (3)-(6).

Las funciones de base B-spline grado doble $\{N_{i,k}^{j-1}(t)\}$ se pueden representar por $\{N_{i,k}^j(t)\}$, obteniéndose

Teorema 3. Si $P^{j-1}(t)$, $P^j(t)$ son curvas B-spline grado doble definidas sobre los vectores nodo T^{j-1} y T^j , respectivamente, y ellas son las mismas curvas, entonces sus puntos de control $\{P_i^{j-1}\}$, $\{P_i^j\}$ satisfacen

$$P_i^j = \begin{cases} P_i^{j-1} & i \leq l_j - k - 1 \\ (1 - a_{i,k}^j)P_i^{j-1} + a_{i,k}^j P_{i-1}^{j-1} & l_j - k \leq i \leq l_j \\ P_{i-1}^{j-1} & i > l_j \end{cases} \quad (17)$$

Demostración. Sustituyendo (9) en (16). Luego, en virtud de la propiedad de independencia lineal global de $\{N_{i,k}^j(t)\}$, se obtiene directamente (17). \square

A partir de (17) se sabe que los puntos $\{P_i^j\}$ se obtienen a partir de los puntos $\{P_i^{j-1}\}$ mediante cortes de esquina. Aplicando este método intervalo de nodo por intervalo de nodo, se puede elevar el grado de $P(t)$ en todos los intervalos de nodo mediante cortes de esquina. Luego, se obtiene

Teorema 4. La elevación de grado de las curvas B-spline es un corte de esquina.

Demostración. Dada una curva B-spline $P(t)$ definida por (1), se reescribe la curva $P(t)$ sobre el vector nodo T como $P^0(t)$ y T^0 , respectivamente. Así, para cada $j = 1, 2, \dots, n-1$, se inserta t_j a T^{j-1} y actualizamos los puntos de control de $P^{j-1}(t)$ a $P^j(t)$ según el Teorema 3 (ver Fig. 2). En base al Teorema 3 se tiene que los puntos de control de $\hat{P}(t)$ (debido a que $P^{n-1}(t) = \hat{P}(t)$) son obtenidos mediante cortes de esquina. \square

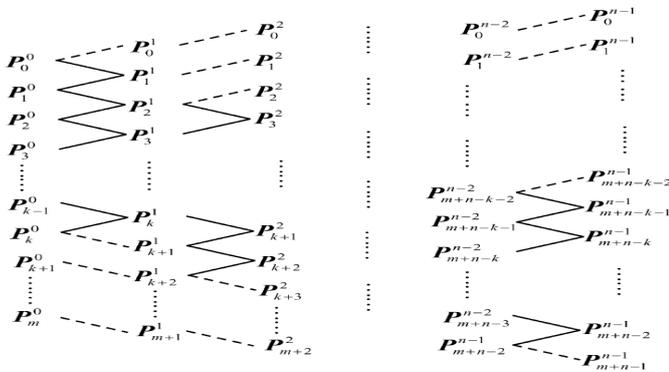


Figura 2. El método de corte de esquina de elevación de grado de una curva B-spline. Los puntos de control conectados por guiones son los mismos puntos con diferentes índices. Los puntos de control conectados por líneas continuas representan el proceso de corte de esquina.

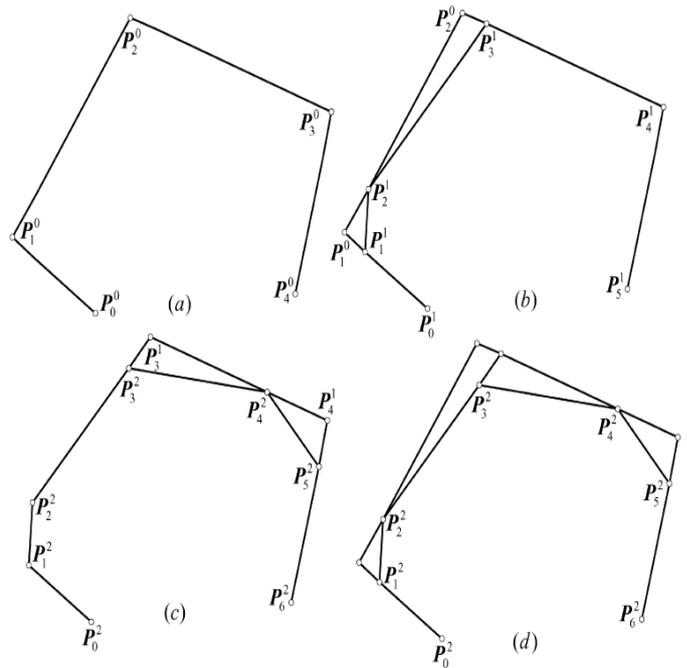


Figura 3. Un ejemplo de la elevación del grado. Un B-spline cúbico el cual se define por los puntos de control $\{P_i\}$ ($i = 0, 1, \dots, 4$) y vector nodo $\{0, 0, 0, 0, 0, 4, 1, 1, 1, 1\}$; (a) son los puntos de control iniciales; (b) son los puntos de control de $P^1(t)$; (c) son los puntos de control de $P^2(t)$, (d) proceso completo de corte de esquina.

Para aclarar el proceso de corte de esquina de la elevación de grado de la curva B-spline $P(t)$, se presenta un ejemplo (ver Fig. 3).

Finalmente se describe el significado geométrico de los puntos de control auxiliares que aparecen en el proceso de corte de esquina: los puntos de control auxiliares $\{P_i^j\}$ son los puntos de control de la curva B-spline grado doble definida sobre el vector de nodo T^j

5. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado la teoría de los B-spline grado doble. De acuerdo a esto, se prueba que el método de elevación de grado de curvas B-spline se puede interpretar como un proceso de corte de esquina. Sin embargo este método no conduce a un algoritmo eficiente debido a la complejidad del cálculo de los pesos.

1. G. Farin. Curves and Surfaces for CAGD. Morgan Kaufmann, San Francisco, 5 edition, 2001.
2. C. deBoor. Cutting corners always works. Computer Aided Geometric Design, 4:125-131,1987.
3. P.J. Barry and R.N. Goldman. A recursive proof of a B-spline identity for degree elevation. Computer Aided Geometric Design, 5:173-175,1988.
4. Q. Huang and S. Hu. Fast degree elevation and knot in-

- sertion for B-spline curves. Computer Aided Geometric Design, 22:183-197,2005.
5. M. Paluszny and H. Prautzsch. A geometric look at corner cutting. Computer Aided Geometric Design, 14:421-447,1997.
6. L. Piegl and W. Tiller. The NURBS Book. Springer, Berlin, 2 edition, 1997.
7. H. Prautzsch and B. Piper. A fast algorithm to raise the

degree of splines curves. Computer Aided Design, 8:253-266,1991.

8. G. Wang and Q. Chen. NUAT B-spline curves. Computer Aided Geometric Design, 21:193-205,2004.