

Deducción de la Fórmula Empírica de Breit-Wigner para las Resonancias Mediante Modificación de las Reglas de Oro de Fermi

Lindber Salas[†], Orlando Pereyra[†]

[†]Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería

E-mail: lsalase@uni.pe, opereyra@uni.edu.pe

Recibido el 09 de junio del 2010; aceptado el 20 julio del 2010

En este trabajo se presenta el estudio de la resonancia en la dispersión de partículas desde dos puntos de vista. Primero se trata la resonancia considerando que la partícula que se intercambia (bosón) en el proceso de dispersión tiene un tiempo de vida finito. Esto ocasiona que se modifique el término del propagador según el mecanismo de Breit-Wigner, este análisis es el que comúnmente se encuentra en cualquier bibliografía que encare el problema. Segundo se considera que las partículas que se dispersan primero forman un bosón intermediario real, y luego el bosón decae en las mismas partículas finales que observamos en el primer punto. Haciendo modificaciones pertinentes a la regla de Oro de Fermi, se explica de una manera más clara el problema de resonancia sin la necesidad de modificar el propagador como en el punto anterior.

Palabras Claves: Resonancia, Propagador, Sección de Dispersión.

In this work we show the study of the resonance in the scattering process from two point of view. First we, take the resonance considering a particle interchange (boson) having a finite lifetime, this result in the modification of the propagator term like Breit-Wigner mechanism. This analysis we found commonly in any bibliography that face this problem. Secondly, we consider that the particles first scattering creating a real intermediate boson on then it Higgs decays in the same final particles saw in the first case. Doing the pertinent modifications to the Fermi golden rule, the problem is explained in a much dear fashion without the need of modified the propagator as Breit-Wigner did.

Palabras claves: Resonance, propagator, scattering section.

1. Introducción

Para entender el problema de resonancia, consideremos la dispersión $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, dicho proceso puede ocurrir por dos partículas virtuales (figura 1) una el fotón y la otra el bosón neutro Z. Si se trabaja con energías cerca a la masa del bosón neutro Z, y no se considera la polarización de las partículas involucradas en el proceso dispersivo (tanto iniciales como finales), se escribe la sección total de dispersión como [1]:

$$\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+) = \sigma_{\gamma\gamma} + \sigma_{zz} + \sigma_{\gamma z} \quad (1)$$

donde:

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma} &= \frac{4}{3\pi} \left(\frac{g_\gamma^2}{8\sqrt{s}} \right)^2, \\ \sigma_{\gamma z} &= \frac{g_\gamma^2 g_z^2 c_V^e c_V^\mu}{24\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s - m_z^2} \right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{3\pi} \left(\frac{\sqrt{s} g_z^2}{8(s - m_z^2)} \right)^2 (c_V^e{}^2 + c_A^e{}^2)(c_V^\mu{}^2 + c_A^\mu{}^2), \quad (2) \end{aligned}$$

y \sqrt{s} es la energía del sistema centro de momento, g_γ y g_z son las constantes de acople electromagnética y débil neutra respectivamente, los coeficientes c_V^l y c_A^l ($l: e, \mu$) son determinados por un solo parámetro fundamental θ_w , llamado el "ángulo de Weinberg", y $\operatorname{Re}(x)$ se refiere a la parte real del argumento complejo x .

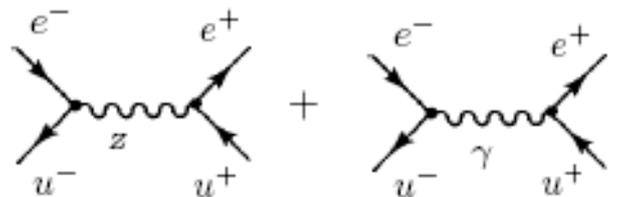


Figura 1. Proceso de dispersión $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ con dos contribuciones Z^0 y γ virtuales.

De (2) se puede observar que cuando la energía \sqrt{s} es igual a la masa del bosón Z la sección total tendría que ser infinita, cosa que no se observa en los experimentos [2], lo que ocurre es que para energías $\sqrt{s} \approx m_z$ (polo del Z) la sección total aumenta rápidamente (generalmente un pico) conocido como resonancia.

Para resolver este problema la mayoría de las bibliografías (De [1] - [3]) incorporan el concepto de resonancia considerando que la partícula intermediaria (bosón Z) no es estable, y que el tiempo de vida Γ_z (en unidades naturales) del bosón es pequeña comparada con la masa del bosón m_z .

La anterior idea es plasmada modificando el término del propagador del bosón Z según la fórmula de Breit-Wigner [1]:

$$\frac{1}{(s - m_z^2)} \rightarrow \frac{1}{(s - m_z^2 + i\Gamma_z m_z)}, \quad (3)$$

con la modificación al propagador (3) se resuelve el problema de resonancia, obteniéndose una sección total de dispersión finita en el punto de resonancia:

$$\sigma(e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+) = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{g_z^2}{8\Gamma_z} \right)^2 (c_V^{e^2} + c_A^{e^2})(c_V^{\mu^2} + c_A^{\mu^2}) + \frac{4}{3\pi} \left(\frac{g_z^2}{8m_z} \right)^2, \quad (4)$$

como $\Gamma_z \ll m_z$ ($\Gamma_z \approx 0,03m_z$) el segundo término de (4) se desprecia, obteniéndose:

$$\sigma(e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+) \approx \frac{1}{3\pi} \left(\frac{g_z^2}{8\Gamma_z} \right)^2 (c_V^{e^2} + c_A^{e^2})(c_V^{\mu^2} + c_A^{\mu^2}). \quad (5)$$

Pero la idea de modificar el propagador del bosón intermediario, que resuelve con gran precisión la resonancia de una serie de procesos dispersivos, no es evidente en el sentido que no viene de primeros principios. Lo que este trabajo propone es una forma alternativa de resolver el problema de resonancias a nivel de árbol.

2. Forma alternativa de resolver el problema de resonancia

Primero recordemos como es posible realizar el cálculo teórico de la sección de dispersión y tasa de decaimiento en procesos dispersivos, para esto:

Tasa de Decaimiento

Una partícula A en el estado inicial decae formando N partículas en el estado final, la tasa de decaimiento diferencial de la partícula A , $d\Gamma_A$ se define como la probabilidad de transición entre el estado inicial (partícula A) y el estado final (N partículas) por unidad de tiempo, y viene dada por la relación[4]:

$$d\Gamma_A = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |M_1|^2 \frac{1}{2\sqrt{s}} \prod_{\alpha} \frac{d^3 \vec{p}'_{\alpha}}{(2\pi)^3 2\epsilon_{\alpha}}, \quad (6)$$

donde p_i y p_f son las sumas del cuadrimento de todas las partículas en estados iniciales y finales, M_1 es la amplitud de dispersión asociada al proceso

$$A \rightarrow 1 + 2 + \dots + N,$$

\sqrt{s} es la energía de la partícula que se desintegra, el índice α numera las partículas en el estado final, de modo que $\sum_{\alpha} \vec{p}'_{\alpha} = \vec{p}_f$ (\vec{p}_f momento total final) y ϵ_{α} es la energía final de cada partícula.

Sección de Dispersión

En el caso de dos partículas en el estado inicial (A y B) que se dispersan formando N partículas en el estado final, la probabilidad de transición entre el estado inicial

y el estado final por unidad de tiempo, viene dada por la relación[4]:

$$dw = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |M_2|^2 \frac{1}{4\epsilon_1 \epsilon_2 V} \prod \frac{d^3 \vec{p}'_{\alpha}}{(2\pi)^3 2\epsilon_{\alpha}}, \quad (7)$$

donde p_i y p_f son las sumas del cuadrimento de todas las partículas en estados iniciales y finales, M_2 es la amplitud de dispersión asociada al proceso

$$A + B \rightarrow 1 + 2 + \dots + N,$$

ϵ_1 y ϵ_2 son las energías de la partículas A y B respectivamente, V es el volumen de normalización, el índice α numera las partículas en el estado final, de modo que $\sum_{\alpha} \vec{p}'_{\alpha} = \vec{p}_f$. En este caso, la cantidad que nos interesa no es la probabilidad sino la sección diferencial $d\sigma$; sección diferencial que se obtienen a partir de (7) dividiendo por la cantidad:

$$j = \frac{I}{\epsilon_1 \epsilon_2 V}, \quad (8)$$

donde I representa el escalar [4]

$$I = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}, \quad (9)$$

m_1 , m_2 y p_1 , p_2 son la masa y cuadrimento de las partículas A y B respectivamente, así para la sección diferencial se encuentra la relación:

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |M_2|^2 \frac{1}{4I} \prod_{\alpha} \frac{d^3 \vec{p}'_{\alpha}}{(2\pi)^3 2\epsilon_{\alpha}}. \quad (10)$$

En el caso que la dispersión origine dos partículas en el estado final, y se trabaje en el sistema centro de masa la relación (10) adquiere la forma [4]:

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} |M_2|^2 \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|s} d\Omega. \quad (11)$$

donde $|\vec{p}|$, $|\vec{p}'|$ representan a los módulos de los momentos de las partículas iniciales y finales respectivamente, \sqrt{s} es la energía del sistema centro de masa.

Las cantidades $d\Gamma$ y $d\sigma$ son conocidas como las *reglas de Oro de Fermi para el decaimiento y para la dispersión* respectivamente.

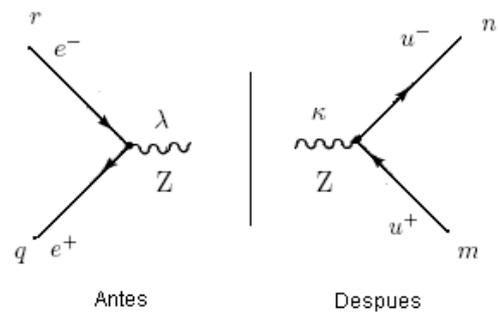


Figura 2. Proceso $e^- + e^+ \rightarrow u^- + u^+$ con intercambio de partículas Z .

Comprendido cómo se definen las cantidades $d\Gamma$ y $d\sigma$, pasemos a resolver el problema de resonancia. Continuando con el ejemplo de la dispersión $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, consideremos el proceso de la figura 2, es decir un electrón-positrón se aniquilan formando el bosón Z y luego esta decae en un muon-antimuon, este proceso a diferencia del proceso $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ vía el intercambio del bosón Z , ocurre por medio de una partícula real no una virtual, esto permite calcular el valor de la sección $d\sigma$ justo en el polo de Z . Para realizar el cálculo de la sección de dispersión necesitamos encontrar la probabilidad dP de que el par e^-e^+ se disperse formando el bosón Z y luego decaiga formando el par $\mu^-\mu^+$, y dividirla por la canti-

dad j . Guiándonos de la mecánica cuántica consideremos lo siguiente:

La probabilidad de que el par e^-e^+ se dispersen creando el bosón Z y luego este decaiga formando el par $\mu^-\mu^+$, es igual a la probabilidad de que el par e^-e^+ se dispersen formando un bosón Z por la probabilidad de que un bosón Z decaiga decaiga formando el par $\mu^-\mu^+$.

En otras palabras la probabilidad de $1 \rightarrow 3$ es igual a la probabilidad $1 \rightarrow 2$ por la probabilidad $2 \rightarrow 3$. Resultado conocido de la teoría de probabilidades. Usando las relaciones (6) y (7), aplicadas para el caso en que el decaimiento y la dispersión ocurran formando dos partículas en el estado final, la probabilidad dP se escribe como:

$$dP = \frac{t\pi(2\pi)^4\delta^4(p-p_i)\delta^4(p_f-p)|M_1M_2|^2d^3\bar{p}}{8s\epsilon_1\epsilon_2V} \frac{d^3\bar{p}_3}{(2\pi)^32\epsilon_3} \frac{d^3\bar{p}_4}{(2\pi)^32\epsilon_4}, \quad (12)$$

donde M_1 es la amplitud de dispersión asociada al proceso $e^- + e^+ \rightarrow Z$, M_2 es la amplitud de dispersión asociada al proceso $Z \rightarrow \mu^- + \mu^+$. p_i y p_f son las sumas del cuadrimomento de todas las partículas en estados iniciales y finales, p es el cuadrimomento del boson real Z (es decir cumple con $p^2 = m_z^2$). \bar{p}_3, \bar{p}_4 y ϵ_3, ϵ_4 son los momen-

tos y energías de las partículas finales, \bar{p} es el momento del bosón Z y ϵ_1, ϵ_2 son las energías de las partículas iniciales. El factor t (tiempo que dura interacción) se introduce para que la cantidad (12) represente la probabilidad por unidad de tiempo, usando la relación (6) y (7), la sección diferencial se escribe como:

$$d\sigma = \frac{t\pi(2\pi)^4\delta^4(p-p_i)\delta^4(p_f-p)|M_1M_2|^2d^3\bar{p}}{8sI} \frac{d^3\bar{p}_3}{(2\pi)^32\epsilon_3} \frac{d^3\bar{p}_4}{(2\pi)^32\epsilon_4}. \quad (13)$$

de la relación (13) se observa que existen dos cantidades δ^4 , una de ellas puede escribirse como [2]:

$$\delta^4(p_i-p) = \frac{t}{2\pi}\delta^3(\bar{p}_i-\bar{p}), \quad (14)$$

la δ^3 de la relación (14), desaparece al integrar (13) respecto de $d^3\bar{p}$, obteniéndose:

$$d\sigma = \frac{t^2\pi(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)|M_1M_2|^2}{16sI} \frac{d^3\bar{p}_3}{(2\pi)^32\epsilon_3} \frac{d^3\bar{p}_4}{(2\pi)^32\epsilon_4}. \quad (15)$$

$$d\sigma = \frac{1}{\Gamma_z^2 s} \left\{ |M_1M_2|^2(2\pi)^4 \frac{\delta^4(p_f-p_i)}{4I} \frac{d^3\bar{p}_3}{(2\pi)^32\epsilon_3} \frac{d^3\bar{p}_4}{(2\pi)^32\epsilon_4} \right\}, \quad (16)$$

se observa que el termino entre corchetes en (16) tiene la misma forma que (10), es decir este termino es como si proviniera de la dispersión e^-e^+ en $\mu^-\mu^+$ con la diferencia que la amplitud de probabilidad M es el producto las dos amplitudes que intervienen en el proceso que se esta considerando. Trabajando en el sistema centro de masa y teniendo en cuenta la relación (11), la sección de dispersión diferencial en el punto de resonancia (16) adquiere la forma de:

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2\Gamma_z^2 s^2} |M_1M_2|^2 \frac{|\bar{p}'|}{|\bar{p}|} d\Omega, \quad (17)$$

teniendo en cuenta que el bosón Z es real y que se trabaja en el sistema centro de momento la energía $\sqrt{s} = m_z$, (17) se escribe como:

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2\Gamma_z^2 m_z^4} |M_1M_2|^2 \frac{|\bar{p}'|}{|\bar{p}|} d\Omega. \quad (18)$$

Como se mencionó anteriormente el factor t es el tiempo que dura la interacción, interacción que proviene del bosón real Z , así se puede considerar que el tiempo que dura la interacción es igual al tiempo que vive el bosón Z , tiempo que puede tomarse como dos veces el tiempo de vida media del bosón Z , τ_z ($\tau_z = 1/\Gamma_z$). Con esto último y la relación (14) se escribe la sección diferencial de dispersión en el punto de resonancia como:

Lo que prosigue es el cálculo de $|M_1M_2|^2$. Las correspondientes amplitudes de dispersión se escriben usando las reglas de Feynman[1]:

$$M_1 = i[\bar{v}_q(p_2) \frac{-ig_z}{2} \gamma^\alpha (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u_r(p_1)] \epsilon_\alpha^\lambda, \\ M_2 = i[\bar{u}_n(p_3) \frac{-ig_z}{2} \gamma^\beta (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) v_m(p_4)] \epsilon_\beta^\kappa. \quad (19)$$

En el caso de dispersión de partículas no polarizadas, la sección de dispersión se obtiene promediando el cuadrado $|M|^2 = |M_1M_2|^2$ respecto de las polarizaciones iniciales y sumando sobre las finales, es decir, formando la cantidad [4]

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{12} \sum_{\lambda, \kappa} \sum_{r, q} \sum_{m, n} |M|^2, \quad (20)$$

donde la suma se extiende a todas las direcciones de spin de las partículas iniciales y finales; el factor $1/12$

convierte una de estas sumas en promedio, el factor de $1/12$ se introduce porque el electrón y el positrón tienen dos posibilidades del spin mientras que el bosón Z tiene

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{g_z^4}{12} [(c_V^{e^2} + c_A^{e^2})(m_z^2 - 2m_e^2 + \frac{2m_e^4}{m_z^2}) + 3m_e^2(c_V^{e^2} - c_A^{e^2})][(c_V^{\mu^2} + c_A^{\mu^2})(m_z^2 - 2m_\mu^2 + \frac{2m_\mu^4}{m_z^2}) + 3m_\mu^2(c_V^{\mu^2} - c_A^{\mu^2})], \quad (21)$$

para simplificar más los cálculos, se desprecia la masa del electrón y muon con respecto de la masa del bosón Z¹, con lo cual se escribe (21) como sigue

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{g_z^4}{12} m_z^4 [c_V^{e^2} + c_A^{e^2}][c_V^{\mu^2} + c_A^{\mu^2}], \quad (22)$$

como se considera las masas del muón y electrón despreciables se cumple que el momento final e inicial son iguales (en módulo), considerando esto y el valor obtenido de $\langle |M|^2 \rangle$ se escribe (18) como sigue

$$d\sigma = \frac{1}{\Gamma_z^2} \frac{1}{64\pi^2} \frac{g_z^4}{12} [c_V^{e^2} + c_A^{e^2}][c_V^{\mu^2} + c_A^{\mu^2}] d\Omega, \quad (23)$$

integrando (23) respecto del diferencial de ángulo sólido $d\Omega$, la expresión para la sección de dispersión en el punto de resonancia se escribe como:

$$\sigma(e^- e^+ \xrightarrow{Z \text{ real}} \mu^- \mu^+) = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{g_z^2}{8\Gamma_z} \right)^2 [c_V^{e^2} + c_A^{e^2}][c_V^{\mu^2} + c_A^{\mu^2}], \quad (24)$$

se observa que la sección de dispersión total en el punto de resonancia (24) obtenida por medio de la relación (16), es la misma que la obtenida cuando se modifica el termino del propagador asociado al bosón Z (relación (5)).

La relación (16), no solamente es aplicable a procesos dispersivos donde se considere la resonancia producto del bosón Z, también se puede aplicar a procesos donde la resonancia sea producto de los bosones cargados W^\pm . Esto puede observarse en el siguiente proceso de dispersión.

con

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{-g_w^2}{16(s - m_w^2)} [\bar{v}_q(p_2)\gamma^\alpha(1 - \gamma^5)u_r(p_1)][\bar{u}_n(p_3)\gamma_\alpha(1 - \gamma^5)v_m(p_4)], \\ M_2 &= \frac{g_z^2}{16(p_z - m_z^2)} [\bar{u}_r(p_3)\gamma^\beta(c_V^l - c_A^l\gamma^5)u_n(p_1)][\bar{v}_q(p_2)\gamma_\beta(1 - \gamma^5)v_m(p_4)], \end{aligned} \quad (26)$$

donde M_1, M_2 son las amplitudes de dispersión asociada al proceso $l + \bar{\nu}_l \rightarrow l + \bar{\nu}_l$ considerando el bosón W y Z respectivamente, \sqrt{s} es la energía del sistema centro de masa, m_z y m_w son las masas de los bosones Z y W respectivamente, y p_z es el cudrimomento asociado al bosón virtual Z, como puede observarse de la figura 3.

Uno puede imaginar que como existen dos partículas masivas se tendrá que corregir el término del propagador asociado tanto al bosón Z como al bosón W, pero recordemos que se corrige el termino del propagador para evitar la resonancia, resonancia que ocurre debido al propa-

tres polarizaciones. Las sumas de las polarizaciones se pueden realizar usando las relaciones de completitud [1], obteniéndose para la relación (20), la siguiente expresión:

3. Proceso $l + \bar{\nu}_l \rightarrow l + \bar{\nu}_l$

Otro ejemplo de resonancia se observa en la dispersión $l + \bar{\nu}_l \rightarrow l + \bar{\nu}_l$ ($l = e, \mu, \tau$), este proceso puede ocurrir por dos partículas virtuales (figura 3) una el bosón cargado W^- y la otra el bosón neutro Z. Para resolver el problema de resonancia primero consideremos el habitual método de corregir el propagador, Si se trabaja en el sistema centro de masa la sección de dispersión diferencial, viene dada por la relación (11)

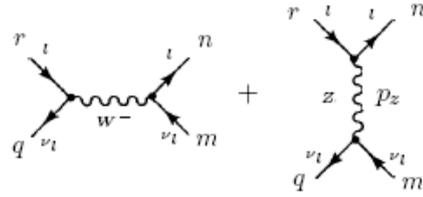


Figura 3. Diagrama de Feynman del proceso $l + \bar{\nu}_l \rightarrow l + \bar{\nu}_l$, se muestran las contribuciones del bosón virtual W^- y bosón virtual Z. Donde r, q, n, m son las polarizaciones de los leptones iniciales y finales, p_z es el cuadrimomento asociado al bosón Z virtual.

$$d\sigma = \frac{1}{64s\pi^2} |M_1 + M_2|^2 d\Omega. \quad (25)$$

gador asociado al bosón W más no del bosón Z, para aclarar esto ultimo si se trabaja con energías $\sqrt{s} \approx m_z$ el propagador asociado al bosón Z se escribe como ¹:

$$\frac{1}{(p_z - m_z^2)} = \frac{1}{(-\frac{s(1-\cos\theta)}{2} - m_z^2)} \quad (27)$$

donde θ es el ángulo formado por l incidente y l dispersado en el sistema centro de masa. Se puede observar que el segundo termino de (27) nunca es nulo sin importar el ángulo de dispersión θ ó la energía \sqrt{s} a la cual se trabaje, es decir no existe resonancia debido al propagador

¹La masa del electrón es $\approx 0,5MeV$, la masa del muon es $\approx 100MeV$ y la masa del Z es $\approx 92GeV$

¹Para energías $\sqrt{s} \approx m_z$, se considera nula la masa del leptón l

asociado al bosón Z. Entendiendo que solo existe resonancia producto del bosón W, Para solucionar el problema de resonancia el método Breit-Wigner corrige el término asociado al propagador del bosón W como sigue:

$$\chi(s) = \frac{1}{(s - m_w^2)} \rightarrow \chi(s) = \frac{1}{(s - m_w^2 + i\Gamma_w m_w)} \quad (28)$$

Lo que prosigue es el calculo de $|M|^2 = |M_1 + M_2|^2$; en el caso de dispersión de partículas no polarizadas, la sección de dispersión se obtiene promediando el cuadrado $|M|^2$ respecto de las polarizaciones iniciales y sumando sobre las finales, es decir, formando la cantidad

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{r,q} \sum_{m,n} |M|^2, \quad (29)$$

donde la suma se extiende a todas las direcciones de spin de las partículas iniciales y finales; el factor 1/4 convierte una de estas sumas en promedio. Las sumas de las polarizaciones se pueden realizar usando las relaciones de

$$\sigma(l_1 + \bar{\nu}_{l_1} \rightarrow l_1 + \bar{\nu}_{l_1}) = \sigma_{WW} |\chi(s)|^2 + \sigma_{WZ} \text{Re}\chi(s) + \sigma_{ZZ}. \quad (32)$$

con:

$$\begin{aligned} \sigma_{ZZ} &= \frac{(c_V^l + c_A^l)^2}{4\pi} \left(\frac{g_z^2}{8s} \right)^2 \left(\frac{s(s + m_z^2)}{m_z^2} - 2(s + m_z^2) \ln\left(\frac{s + m_z^2}{m_z^2}\right) + s \right) - \frac{(s + 2m_z^2)(c_V^l - c_A^l)^2}{4\pi m_z^2 (s + m_z^2)} \left(\frac{g_z^2}{8} \right)^2, \\ \sigma_{WZ} &= \frac{-(c_V^l + c_A^l)}{4\pi} \left(\frac{g_z^2}{8s} \right)^2 \left(\frac{s(s - 2m_z^2)}{2} + (s + m_z^2)^2 \ln\left(\frac{s + m_z^2}{m_z^2}\right) - 2s(s + m_z^2) \right), \\ \sigma_{WW} &= \frac{1}{3\pi} \left(\frac{g_w^2}{8} \right)^2, \end{aligned} \quad (33)$$

si se considera $m_z \approx m_w$ en (33), la sección de dispersión en el punto de resonancia viene dada por:

$$\sigma(l + \bar{\nu}_l \rightarrow l + \bar{\nu}_l) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{g_z^2}{8m_w} \right)^2 [(3 - \ln(2))(c_V^l + c_A^l)^2 - \frac{3}{2}(c_V^l - c_A^l)^2] + \frac{1}{3\pi} \left(\frac{g_w^2}{8\Gamma_w} \right)^2 \quad (34)$$

como $\Gamma_w \ll m_w$ ($\Gamma_w \approx 0,03m_w$) el primer termino de (34) se desprecia, obteniéndose:

$$\sigma(l + \bar{\nu}_l \rightarrow l + \bar{\nu}_l) = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{g_w^2}{8\Gamma_w} \right)^2 \quad (35)$$

Hasta aquí se ha solucionado la resonancia considerando la modificación del propagador del bosón W. Ahora encaremos el problema de resonancia usando la relación (16). Para el proceso $l + \bar{\nu}_l \rightarrow l + \bar{\nu}_l$ resolveremos la resonancia considerando que el l y $\bar{\nu}_l$ se dispersan formando el bosón W y este decae formando el par $l + \bar{\nu}_l$ (figura 4), se puede imaginar que también debe considerarse que el l y $\bar{\nu}_l$ se dispersan formando el bosón Z y este decae en el par $l + \bar{\nu}_l$, pero el proceso $l + \bar{\nu}_l \rightarrow Z$ no puede ocurrir porque no se conserva la carga eléctrica. Es decir, si se usa la relación (16) solo se debe tener en cuenta la resonancia producto de la formación del bosón W. Usando la relación (18) y considerando el cambio de Γ_z, m_z por Γ_w, m_w , en el sistema centro de masa, la sección de dispersión en el punto de resonancia esta dada por:

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 \Gamma_w^2 m_w^4} |M_1 M_2|^2 d\Omega. \quad (36)$$

completitud [1], obteniéndose para la relación (29), la siguiente expresión:

$$\langle |M|^2 \rangle = G_{zz} + G_{zw} \text{Re}\chi(s) + G_{ww} |\chi(s)|^2, \quad (30)$$

con

$$\begin{aligned} G_{zz} &= \frac{s^2 g_z^4}{16} \left[\frac{(c_V^l + c_A^l)^2 (1 + \cos\theta)^2 + 4(c_V^l - c_A^l)^2}{2s(1 - \cos\theta) + 4m_z^2} \right], \\ G_{zw} &= -(c_V^l + c_A^l) \left(\frac{s g_z^2 g_w^2}{4} \right)^2 \frac{(1 + \cos\theta)^2}{2s(1 - \cos\theta) + 4m_z^2}, \\ G_{ww} &= \frac{s^2 g_w^4 (1 + \cos\theta)^2}{16}. \end{aligned} \quad (31)$$

Remplazando el valor obtenido de $\langle |M|^2 \rangle$ en (25) e integrando respecto del diferencial de ángulo solido $d\Omega$, la expresión para la sección de dispersión se escribe como:

Lo que prosigue es el calculo de $|M_1 M_2|^2$. Las correspondientes amplitudes de dispersión se escriben usando las reglas de Feynman[1]:

$$\begin{aligned} M_1 &= i[\bar{\nu}_q(p_2) \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) u_r(p_1)] \epsilon_\alpha^\lambda, \\ M_2 &= i[\bar{u}_n(p_3) \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) v_m(p_4)] \epsilon_\beta^\kappa \end{aligned} \quad (37)$$

En el caso de dispersión de partículas no polarizadas, la sección de dispersión se obtiene promediando el cuadrado $|M|^2 = |M_1 M_2|^2$ respecto de las polarizaciones iniciales y sumando sobre las finales, es decir, formando la cantidad

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{12} \sum_{\lambda, \kappa} \sum_{r,q} \sum_{m,n} |M|^2, \quad (38)$$

las sumas de las polarizaciones se pueden realizar usando las relaciones de completitud [1], obteniendo así para la relación (38), la siguiente expresión:

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{g_w^4}{12} m_w^4 \left[1 - \frac{m_l^2}{m_w^2} \right]^2, \quad (39)$$

para simplificar más los cálculos, se desprecia la masa del lepton l_1 con respecto de la masa del bosón W, con

lo cual se escribe (39) como sigue

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{g_w^4}{12} m_z^4, \quad (40)$$

con el valor obtenido de $\langle |M|^2 \rangle$ se escribe (36) como sigue

$$d\sigma = \frac{1}{(\Gamma_w)^2} \frac{1}{64\pi^2} \frac{g_w^4}{12} d\Omega, \quad (41)$$

integrando respecto del diferencial de ángulo solido $d\Omega$, la expresión para la sección de dispersión en el punto de resonancia se escribe como:

$$\sigma(l + \bar{\nu}_l \xrightarrow{w^- \text{ real}} l + \bar{\nu}_l) = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{g_w^2}{8\Gamma_w} \right)^2, \quad (42)$$

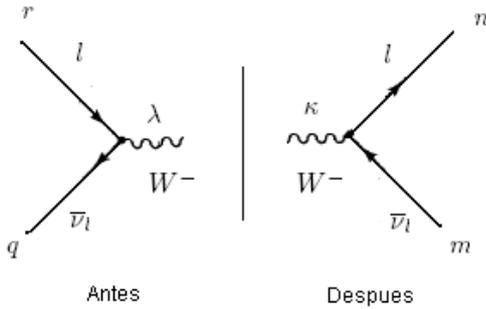


Figura 4. Diagrama de Feynman del proceso $l + \bar{\nu}_l \rightarrow W^-$ y $W^- \rightarrow l + \bar{\nu}_l$. Donde r, q, n, m son las polarizaciones de los leptones iniciales y finales, κ y λ son las polarizaciones del bosón W^- real.

se observa que la sección de dispersión total en el punto de resonancia (42) obtenida por medio de la relación (16), es la misma que la obtenida cuando se modifica el término del propagador asociado al bosón W (relación (35)).

4. Conclusiones

Considerando la relación (16), fue posible calcular las secciones de dispersión en el punto de resonancia para los procesos $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, $l + \bar{\nu}_l \rightarrow l + \bar{\nu}_l$. Estas son finitas e iguales a las secciones calculadas cuando se considera la modificación del propagador asociado al bosón intermediario que ocasiona la resonancia (bosón Z para el proceso $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ y bosón W^- para el proceso $l + \bar{\nu}_l \rightarrow l + \bar{\nu}_l$). Dichas secciones dependen de la tasa de decaimiento total (Γ) de la partícula que ocasiona la resonancia, las constantes de acople neutra y cargada (g_z, g_w respectivamente) y, en el caso de la dispersión $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, de los coeficientes c_V^l y c_A^l ($l: e, \mu$), y vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma(e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+) &= \frac{1}{3\pi} \left(\frac{g_z^2}{8\Gamma_z} \right)^2 (c_V^{e^2} + c_A^{e^2})(c_V^{\mu^2} + c_A^{\mu^2}), \\ \sigma(l + \bar{\nu}_l \rightarrow l + \bar{\nu}_l) &= \frac{1}{3\pi} \left(\frac{g_w^2}{8\Gamma_w} \right)^2. \end{aligned}$$

La relación (16) es equivalente a la regla de Oro de Fermi cuando se considera la modificación del propagador asociado al bosón intermediario que ocasiona la resonancia.

1. F. Mandl and G. Shaw, Quantum Field Theory. (John Wiley & Sons, Reino Unido, 1984).
2. W. Greiner, Gauge theory of weak interactions. (Springer, Alemania, 2002).
3. M. E. Peskin, Quantum Field Theory. (Perseus Books, Estados Unidos de América, 1995).
4. V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, Quantum Electrodynamics. (Pergamon Press Lid., Reino Unido, 1982).